Res., Soc. Dev. 2019; 8(8):e26881212
ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i8.1212

A Sequência de Padovan e o número plástico: uma análise prévia e *a priori*

The Padovan Sequence and the plastic number: a prior analysis and *a priori*

La Secuencia de Padovan y el número plástico: um análisis prévio *ya priori*

Recebido: 20/05/2019 | Revisado: 26/05/2019 | Aceito: 30/05/2019 | Publicado: 02/06/2019

Renata Passos Machado Vieira
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1966-7097
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil
E-mail: re.passosm@gmail.com
Francisco Regis Vieira Alves
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3710-1561
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Brasil
E-mail: fregis@gmx.fr

Resumo

O presente trabalho apresenta as duas fases iniciais da Engenharia Didática com o tema envolvendo o estudo da Sequência de Padovan e o número plástico o qual foi objeto de estudo primordialmente por Richard Padovan (1935-?) e Gérard Cordonnier (1907 – 1977). Com o objetivo de transformar os números de Padovan em um conteúdo a ser ensinado, desse modo, será feita uma investigação teórica, apresentando roteiros de ensino e transposição didática em torno dessa sequência linear e recorrente, para que haja uma maior exploração no ensino acadêmico para o estudo de referida sequência. Por fim, serão realizados aperfeiçoamentos acadêmicos por meio de contexto histórico, matemático e epistemológico.

Palavras-chave: Engenharia Didática; sequência linear; Teoria das Situações Didáticas.

Abstract

The present work presents the two initial phases of Didactic Engineering with the theme involving the study of the Sequence of Padovan and the plastic number which was the object of study primarily by Richard Padovan (1935-?) And Gérard Cordonnier (1907 - 1977). In order to transform the Padovan numbers into a content to be taught, a theoretical investigation will be carried out, presenting teaching guides and didactic transposition around this linear and recurrent sequence, so that there is greater exploitation in the academic teaching to the study of said sequence. Finally, academic improvements will be made through a historical, mathematical and epistemological context.

Keywords: Didactic Engineering; linear sequence; Theory of Didactic Situations.

Resumen

El presente trabajo presenta las dos primeras fases de la Didáctica de la ingeniería con el tema que se plantea el estudio de la secuencia de Padovan y el número de serie que fue el objeto del estudio principal por Richard Padovan (1935-?) Y Gérard Cordonnier (1907 - 1977). Con el fin de transformar los números de Padovan en el contenido que se va a dar, la actividad de estudio se realizará, presentando enseñanzas y didactic transposición alrededor de esta lineal y de secuencia sucesiva, por lo que hay una mayor explotación en la educación académica para el estudio secuencia. Por fin, académica se hará a través de histórico, matemático y epistemológico contexto.
Palabras clave: Ingeniería didáctica; linealización; Teoría de las situaciones didácticas.

1. Introdução

Atualmente, ainda são encontradas dificuldades vindas de professores a respeito do estudo e ensino da matemática. Durante as suas respectivas formações acadêmicas, percebe-se uma grande quantidade de conteúdos em fase de pesquisa, dificultando a contextualização necessária para que se tenha um melhor entendimento do assunto abordado em sala de aula.

Inúmeros trabalhos de pesquisa são realizados para que haja melhorias do ensino e aprendizagem em Matemática no Brasil. Algumas tiveram início no século XX com o objetivo de compreender, interpretar e descrever os fenômenos referentes ao ensino e aprendizagem de Matemática. Pais é um dos especialistas desta habilidade no Brasil, em que afirma:

> A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica (Pais, 2002).

São comuns relatos de alunos da educação básica sobre dificuldades na disciplina de Matemática. Este fato advém da forma como é realizada a abordagem do conteúdo em sala de aula pelo professor. Segundo Chevallard (1991) o saber sofre uma transformação, chegando à sala de aula com uma nova metodologia didática, diferente da estudada na licenciatura ou bacharelado para que então ele possa ser apresentado aos alunos.

Existem muitos obstáculos ao estudar matemática, aparecendo com mais intensidade na fase de aprendizagem e síntese dos conhecimentos. É comum notar em sala de aula a metodologia de ensino por parte de alguns professores, principalmente da educação básica, onde se dá por meio de resolução de listas de exercícios semelhante aos exemplos mostrados em sala de aula pelo professor. Com isso, torna-se o processo de ensino e aprendizagem repetitivo, além de tornar os discentes estáticos ao conhecimento, não instigando o lado investigativo e histórico do conteúdo abordado.

Muitos docentes, aprendem uma determinada metodologia durante a sua formação, e optam por repassar esse método para os seus alunos, mesmo sem saber se essa será eficaz, ou se já está ultrapassada. Tendo em vista uma grande quantidade de fatores não favoráveis para a formação inicial do professor em sua respectiva disciplina de História da Matemática do curso de Licenciatura pensamos em instrumentalizar o processo de formação para o estudo e ensino de Matemática utilizando Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas.

Estas teorias apresentam novos meios para buscar alternativas que melhorem o ensino aprendizagem em matemática e envolvam o professor, o aluno e o saber, tanto dentro como fora de sala de aula, tendo como um dos objetivos primordiais da didática da matemática, a caracterização de um processo de aprendizagem por meio de uma série de situações reprodutíveis, denominadas de situações didáticas, que estabelecem os fatores determinantes para a evolução do comportamento dos alunos. Brousseau afirma que:

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar um saber constituído ou em vias de constituição. (Brousseau, 1986).

Assim, ao ocorrer aprendizagem, diz-se que houve uma relação simbólica, mediada pelo uso de instrumentos e signos, que agiram como estímulos artificiais ou externos, tal como a relação existente entre o homem e o mundo, na qual o ser humano é capaz de controlar e regular sua conduta e, assim, construir aprendizagens significativas.

Segundo Brousseau

> Quando o aluno torna-se capaz de colocar em funcionamento e utilizar por ele mesmo o conhecimento que ele está construindo, em situação não prevista de qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo o que pode ser chamado de situação adidática (Brousseau, 1986).

A fim de encontrar alternativas para essa nova abordagem, realizamos estudos através de trabalhos de Alves (2016) e Santos e Alves (2017) em que relatam a aplicação de uma Engenharia Didática desenvolvida no curso de Licenciatura em Matemática, apresentando como objetivo relatar e debater as propriedades conceituais da Sequência de Fibonacci sobre o campo dos números inteiros.

Utilizando a Sequência de Fibonacci como conteúdo matemático, através das duas metodologias, de ensino (Engenharia Didática) e de pesquisa (Teoria das Situações Didáticas), é possível descrever um estudo relativo aos modelos de generalização da SF com ênfase na função geradora, explorando as suas propriedades. Buscando possíveis justificativas sobre a relevância de sua discussão, sugerimos práticas acadêmicas para alunos do ensino superior do curso de formação inicial de professores, em torno desta sequência. Tudo isso é alcançado através de atividades realizadas na disciplina de História da Matemática do curso de Licenciatura em Matemática.

Com o objetivo de transformar a Sequência de Padovan em um conteúdo a ser ensinado, obtendo um cunho mais investigativo e realizando recortes em seu processo de estudo, foi adotado neste trabalho a metodologia de Engenharia Didática com ênfase na Teoria das Situações Didáticas fazendo ainda uma investigação histórica e epistemológica da Sequência de Padovan e do número plástico.

Como a Sequência de Padovan e o número plástico são assuntos são pouco conhecidos, visto que alguns começaram a estudar mais recentemente, assim estudaremos nas seções seguintes como forma de contribuir para o aprendizado desses discentes do curso de formação inicial de professores, aplicando as duas primeiras fases da Engenharia Didática (análises prévia e a priori, com a concepção de situações de ensino) durante este processo (Stewart, 2000).

2. Metodologia

Segundo Pereira et al. (2018), a utilização de métodos científicos não é utilizada somente na área de ciências, porém não existe ciência sem utilizar métodos científicos. Com isso, pode-se perceber que o autor enfatiza a importância da utilização de métodos científicos em diversas áreas das ciências, justificando então a escolha de uma metodologia para este presente trabalho.

A pesquisa realizada neste trabalho, segue baseada em dois modelos metodológicos, a saber: Engenharia Didática e Teoria das Situações Didáticas. Onde a primeira refere-se a uma metodologia de pesquisa de Artigue (1988), e a última uma teoria de ensino fundamentada em Brousseau (1986). Um autor que foi tomado como base para essa pesquisa foi Santos (2017), em que realiza a aplicação de uma Engenharia Didática na sequência de Fibonacci no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará.

Esta análise será feita fundamentada nas duas primeiras fases da Engenharia Didática, que serão melhor explicadas na próxima seção, em associação com a Teoria das Situações Didáticas, criando assim situações didáticas que são analisadas e elencadas para uma possível experimentação a posteriori.

3. A Engenharia Didática e a Teoria das Situações Didáticas

No início do século XIX o matemático Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941) começou a preocupar-se com a formação do professor e as condições de ensino então adotadas até o momento. Com isso, a partir dos anos 80 foram criados na França, centros universitários visando melhorar o sistema de ensino, surgindo então a Engenharia Didática.

Esta metodologia foi criada para analisar as situações didáticas. Vale lembrar que "o termo da Engenharia Didática designa um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professor-engenheiro, com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos" (Douady, 1995b). Apoiado nessa afirmação, pode-se constatar que o professor assume o papel de um engenheiro, realizando planejamentos em torno dos interesses de ensino dos alunos, analisando ainda as situações didáticas propostas.

A Engenharia Didática, segundo Artigue (1988), é uma forma de trabalho didático comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto, se apoia em conhecimentos científicos de seu domínio, aceita se submeter a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, é obrigado a trabalhar objetos mais complexos que os objetos depurados da ciência.

Nessa metodologia, o professor tem o papel de um engenheiro, assim este deverá criar um planejamento, de acordo com cada situação, para que os alunos consigam aprender determinados conteúdos matemáticos.

De acordo com Santos

> Questionamos a grande quantidade de estudos acadêmicos que, em maior ou menor substância, são portadores de uma retórica científica a respeito da formação do professor, em detrimento, da proposição de saberes científicos que indicam roteiros práticos e operacionalizáveis para o contexto de sala de aula (Santos, 2017).

Com essa metodologia de ensino um estudo acerca do tema é feito, para que haja uma investigação teórica desses conteúdos, e assim possa ter um maior aprofundamento e embasamento teórico, para que professores possam repassar os conteúdos aos seus alunos com uma outra metodologia de ensino afim de melhorar o rendimento.

A Engenharia Didática, como metodologia descrita por Artigue (1988), é compreendida em quatro fases: a 1ª fase, das análises prévias, a 2ª fase, da concepção e da análise a priori, a 3ª fase, da experimentação e a 4ª e última fase, da análise a posteriori e validação. Porém, no presente trabalho é abordada somente as duas fases iniciais, onde são destacados os obstáculos epistemológicos dos discentes e realizada uma transposição didática, fazendo com que não haja um prejuízo em relação as demais fases dessa metodologia.

A Teoria das Situações Didáticas é um modelo teórico, segundo o qual, considerando o ensino como projeto e ação social em que o aprendiz se apropria de um saber constituído ou em constituição, a didática da matemática se transforma numa ciência das condições de transmissão e apropriação dos conhecimentos matemáticos.

Segundo Barbosa (2016) esta teoria é apresentada com um instrumento científico tendo como objetivo integrar as contribuições de outras disciplinas, assim, obtendo uma melhor compreensão e aperfeiçoamento dos conteúdos matemáticos. É importante ressaltar que o pensamento do autor é de suma importância para a compreensão da didática matemática, pois com um vasto conhecimento científico, nem sempre é possível obter uma boa compreensão dos conteúdos, é necessário que haja uma metodologia adequada.

Durante a fase dialética na Teoria das Situações Didáticas, o professor deve esclarecer os elementos predominante nas etapas dialéticas/didáticas de ensino desenvolvidas por Brousseau (1986), seja ela de ação, formulação, validação e institucionalização. Assim, o conteúdo que será ensinado, será analisado de acordo com cada uma das etapas segundo esta teoria, validando assim se houve êxito no processo de investigação e, contribuindo para o processo de ensino e aprendizagem do estudante.

Na Situação dialéticas/didáticas de ação, pode-se dizer que os discentes irão tentar resolver as questões propostas, de acordo com o conhecimento adquirido até então. Na Situação dialéticas/didáticas de formulação os estudantes irão transformar as suas resoluções em uma linguagem mais apropriada. Durante a Situação dialéticas/didáticas de validação, serão validadas as teorias formuladas, convencendo os demais estudantes. E por fim, na Situação dialéticas/didáticas de institucionalização, o professor irá revelar a intenção das questões propostas.

No decorrer do trabalho, situações didáticas são criadas baseadas na metodologia de pesquisa, a fim de explorar o lado investigativo do discente, bem como destacar os obstáculos epistemológicos do conteúdo referente à Sequência de Padovan e do número plástico.

Com isso, podemos analisar a importância de transformar o conteúdo matemático para obter uma didática onde ocorra uma maior investigação do conteúdo, bem como uma análise do campo epistêmico-matemático. Para isso, uma das alternativas encontradas é abordar um determinado conteúdo com a metodologia da Engenharia Didática em associação com a Teoria das Situações Didáticas no curso de formação inicial de professores.

Nas seções seguintes são realizadas as duas fases iniciais dessa metodologia aplicadas

Res., Soc. Dev. 2019; 8(8):e26881212
ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i8.1212

a Sequência de Padovan e ao número plástico, tendo duas questões fundamentais, sendo elas: *1) a importância das situações: situações que permitam que os alunos possam construir o conhecimento matemático; 2) adaptação das situações ao ensino comum: adaptações realizadas pelos professores durante a implantação das situações.*

4. Aspectos históricos evolutivos da Sequência de Padovan e do Número Plástico

Os números de Padovan foram descobertos pelo arquiteto Italiano Richard Padovan (1935 - ?), nascido na cidade de Pádua. Esta sequência é semelhante a de Fibonacci, aritmética, e de números inteiros, onde os primeiros termos são definidos por: $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ e representa o seguinte formato:

$$1,1,1,2,2,3,4,5,7,...$$

Definição 1. Para obter esses números, existe uma relação recursiva, que é dada pela equação:

$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$ e onde P_n é o n-ésimo termo da sequência.

A representação geométrica da Sequência de Padovan se dá através da espiral de Padovan, conforme mostra a Figura 1. Esta é composta pela justaposição de triângulos equiláteros respeitando uma regra de construção característica.

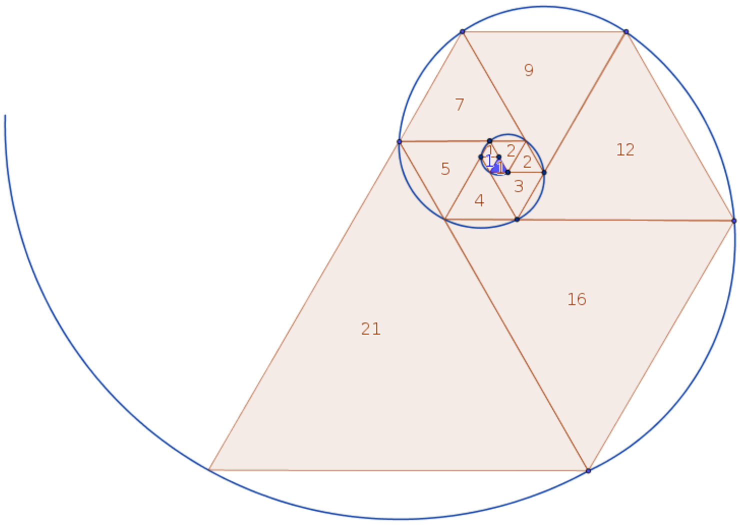

Figura 1. Espiral de Padovan.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Considere o triângulo de lado 1 destacado em azul como o triângulo inicial. A formação da espiral se dá pela adição de um novo triângulo equilátero ao maior lado do polígono formado, iniciando com o triângulo azul.

O holandês Hans Van Der Laan (1904 - 1991) conduziu o curso de arquitetura na Technische Hogeschool de Delf. Utilizou a basílica cristã primitiva de abadia como exemplo para treinar arquitetos na reconstrução de igrejas após a Segunda Guerra Mundial. Laan e seu irmão buscavam padrões para a arquitetura, e acabaram por descobrir um novo padrão de medidas onde a construção desse se dá através de um número irracional, ideal para se trabalhar em escala geométrica e objetos espaciais (retângulos, trapézios, elipses, e etc).

Determinado por ele, este número é conhecido como número plástico ou número radiante. Além de Richard Padovan, Gérard Cordonier (1907 – 1977) também estudou muitas das relações conhecidas dos números plásticos, porém faleceu antes de publicar os seus estudos.

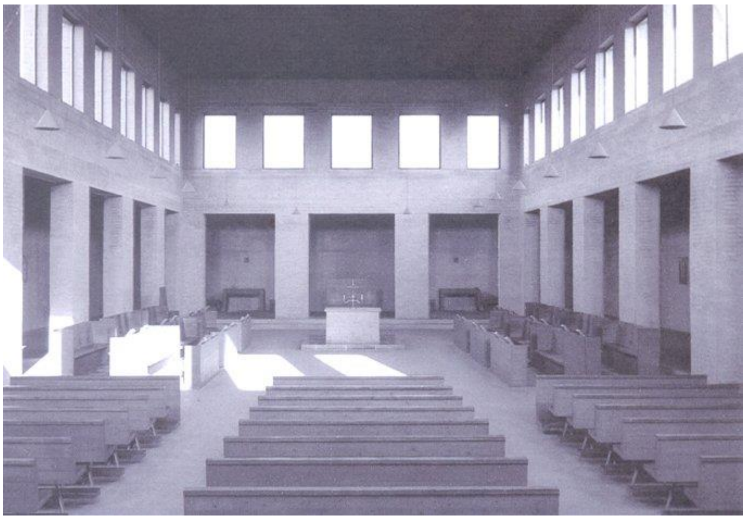

Figura 2. Interior da igreja da abadia "Sint Benedictusberg" em Vaals, Holanda, construída seguindo os princípios arquiteturais de Dom Van der Laan baseados no número plástico.

Fonte: Nieuw Archief voor Wiskunde.

Na Figura 2, é mostrada uma aplicação do número plástico em uma igreja construída seguindo os padrões estudados pelo holandês, onde as suas formas foram regidas pela propriedade deste número conhecido como número plástico ou número radiante.

Richard Padovan encontrou o número plástico, o qual é a relação de convergência ψ, entre os termos subsequentes de sua sequência. Seja Pn a sequência de Padovan e ψ a constante plástica definida por:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1}}{P_n}=\psi\approx 1,32$$

Definição 2. Tal grandeza constitui uma das soluções da equação cúbica $x^3-x-1=0$ e que representa uma da equações cúbicas que pertence à família das trinômios descritos do tipo $x^n-x-1=0, n=2,3...$

Res., Soc. Dev. 2019; 8(8):e26881212
ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i8.1212

Lema 1. O número plástico é uma única solução real da equação cúbica característica da Sequência da Padovan, conhecida por $x^3 - x - 1 = 0$, onde as suas raízes são conhecidas como família dos números plásticos.

Demonstração. Esse resultado pode ser demonstrado através da fórmula de Cardano, onde de acordo com a equação do tipo: $x^3 + px + q = 0$ é possível obter as raízes através de:

$$\mathrm{x} = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{r^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{r^3}{27}}}$$

Logo, para fins de resolução da equação cúbica mencionada acima, temos:

p = q = -1. Substituindo na fórmula das raízes, temos:

$$\mathrm{x} = \sqrt[3]{\frac{-(-1)}{2} + \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-(-1)}{2} - \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-1)^3}{27}}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{-1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{-1}{27}}}$$

Assim, temos:

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} = 1{,}32471795724474602596090 85\ldots \quad \mathrm{W}$$

Spinadel e Buitrago (2009) explicam que Hans van der Laan, arquiteto e membro da ordem beneditina, introduziu de forma pioneira a noção de número plástico.

Uma forma de obter qualquer elemento de uma sequência, sendo esta linear e recursiva é através da Matriz Geradora Q. Esta técnica foi aplicada por Falcón e Plaza (2007) para a SF, e neste trabalho a mesma ideia será aplicada para os números de Padovan. A SP possui uma Matriz-Q de ordem 3x3, a qual quando elevada a n-ésima potência, pode-se obter o n-ésimo termo desta sem o cálculo da recursividade.

Definição 3. De acordo Sokhuma (2013) e Seenukul (2015), tem-se a relação matricial representada por:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Atrasando a sequência, alterando os valores iniciais destes números para: 0,0,1. Assim, ao elevar esta matriz a n-ésima potência, tem-se que:

$$Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{bmatrix}, n \geq 3$$

Existe ainda uma função geradora que permite a resolução de recorrências lineares com coeficientes constantes. Tal procedimento demonstrou como encontrar os números de Fibonacci sem ser necessário calcular todos os números que o procedem (Koshy, 2001).

Definição 4. Para Padovan, e de acordo com Ferreira (2015), considerando $P_0 = P_1 = 1, P_2 = 0$, tem-se que:

$$G(P_{n,}x) = \frac{1+x}{1-x^2-x^3}$$

Nos parágrafos predecessores, abordamos, de forma sucinta, um conjunto de definições matemáticas que confirmam um processo matemático e epistemológico evolutivo, intimamente determinado a condicionado pelo modelo estudado e discutido inicialmente por Richard Padovan. Com o escopo de vislumbrarmos o viés histórico e epistemológico objetivado aqui, trazemos ao leitor na tabela 1 abaixo, informações simplificadas e visceralmente condicionadas pelo processo evolutivo da sequência.

DEFINIÇÕES E LEMAS MATEMÁTICOS	DESCRIÇÃO
$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$	Descrição da sequência numérica de Padovan. (Richard Padovan)
$x^3 - x - 1 = 0$	Polinômio característico da Sequência de Padovan. (Voet & Schoonjans, 2009).
$\psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{27}}} \approx 1,32$	Número Plástico (relação de convergência entre os termos vizinhos da Sequência) (Spinadel & Buitrago, 2009).

Res., Soc. Dev. 2019; 8(8):e26881212
ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i8.1212

$Q=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$ $Q^n=\begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{bmatrix}, n \geq 3$	Matriz geradora Q da sequência de Padovan (Sokhuma, 2013).
$G(P_{n,} x)=\dfrac{1+x}{1-x^2-x^3}$	Função Geradora da Sequência de Padovan (Ferreira, 2015).

Tabela 1. Definição epistemológico-evolutiva da Sequência de Padovan.

Fonte: Elaborada pelos autores.

A tabela 1 apresenta um aparato das definições e lemas matemáticos apresentados nesta seção, bem como sua breve descrição referendados autores que realizaram estudos relacionados à estes conteúdos matemáticos para que sirva como um auxilia durante estudos em torno desta sequência. Assim, serão mostrados alguns elementos que tem por finalidade traçar os interesses em nossa investigação histórica, desenvolver um roteiro com a Sequência de Padovan, visando melhorar a metodologia de pesquisa e de ensino, adotando a Engenharia Didática como meio para alcançar tais objetivos.

5. Análise Prévia

A primeira fase da Engenharia Didática segundo Artigue, Douady, Moreno e Gomez (1995), tem como objetivo responder questões levantadas, além de validar as hipóteses indicadas. É importante determinar e selecionar os elementos que permitem o comportamento dos estudantes. Durante este processo, é necessário que o professor promova a interação do aluno, a fim de produzir conhecimento. Assim, o estudante começará a ganhar uma maior confiança e domínio em relação ao conteúdo visto em sala de aula.

Existem dois elementos que devem ser destacados nesta fase, sendo eles: estudo da organização matemática e análise didática do objeto matemático escolhido. Assim, para o primeiro elemento é importante observar o surgimento da fórmula matemática abordada, entendendo a sua função atual na matemática, os obstáculos epistemológicos, entre outros

ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i8.1212

aspectos. Para o segundo elemento é interessante notar a importância da análise de livros de História da Matemática, tendo em vista como a fórmula é abordada, percebendo o papel da história da Sequência de Padovan; obstáculos epistemológicos identificados pelos autores; prever as possíveis concepções inadequadas dos alunos, entre outros pontos.

A hipótese de investigação será realizada respondendo à pergunta 1 da seção anterior. Os elementos apresentados acima, serão melhor abordados na seção seguinte, a fim de uma maior significação em nossa investigação, tendo em vista o ensino de propriedades da Sequência de Padovan e do número plástico.

6. Análise *a priori*

Nesta fase de experimentação, o professor deve proporcionar uma prática de maneira controlada, para que a sua intervenção aconteça no momento correto, proporcionando uma visão mais investigativa por parte dos estudantes. Assim, ressalta-se o professor como mediador de aprendizagem, tendo o papel de prever ações comportamentais que favoreçam ou não o desenvolvimento do conhecimento, agindo concomitante com a epistemologia, cognitiva e didática (Almouloud & Coutinho, 2008). Com isso, é importante destacar que uma situação didática consiste em o aluno obter sucesso com os seus próprios méritos e, através de ferramentas oportunizadas pelo professor.

Conforme discutido anteriormente, aqui serão elaboradas algumas situações de ensino para a Sequência de Padovan, bem como o número plástico, sendo todas essas estruturadas pela Teoria das Situações Didáticas.

Situação problema I: Qual a solução real da equação $\psi^3 - \psi - 1 = 0$? De maneira semelhante como ocorre na Sequência de Fibonacci, onde a razão de convergência é relacionada com o número de ouro, que relação esta solução possui com o número plástico?

Situação de ação: Os discentes devem perceber que a equação polinomial possui apenas uma solução real, sendo as outras duas complexas. Logo, é importante que o professor estimule o aluno a trabalhar apenas com a solução real, podendo utilizar a fórmula de Cardano para tal resolução e encontrar:

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{27}}} \approx 1{,}32$$

Situação de formulação: É importante que o estudante relembre a relação entre a Sequência de Fibonacci e o número de ouro. Com os números de Fibonacci, ao resolver o

Res., Soc. Dev. 2019; 8(8):e26881212
ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i8.1212

polinômio característico $x^2 - x - 1 = 0$, são encontradas duas raízes reais $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Onde apenas a solução $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61$ é válida para a relação de convergência entre os termos vizinhos, sendo conhecida como número de ouro (razão áurea). Assim, para a Sequência de Padovan, serão descartadas, no momento, as raízes complexas, e utilizando somente a real conforme encontrado na situação acima.

Observando a razão de convergência ψ entre os temos vizinhos da sequência, esta pode ser definida como $\Psi = \lim_{n \to \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} \approx 1{,}32$ e para a Sequência de Padovan, considerando os 12 termos já calculados temos que $\psi = \frac{P_{12}}{P_{11}} = \frac{49}{37} \approx 1{,}32$, pode-se então notar a proximidade entre a razão de convergência ψ e a raiz do polinômio de Padovan.

Situação de validação: O professor deve estimular a pesquisa e investigação aos estudantes. Assim, percebam que de acordo com Spinadel e Buitrago (2009), é possível mostrar que esses o número de ouro e o número plástico diferenciam-se de acordo com os valores atribuídos para m e n, assim denominados números mórficos.

Um número real p>1 é chamado de número mórfico quando existem números naturais m e n, tais que:

$$p + 1 = p^m \text{ e } p + 1 = p^{-n}$$

Se o valor de m e n, forem substituídos respectivamente por 2 e 1, teremos:

$\begin{cases} p+1 = p^2 \\ p = 1 = p^{-1} \end{cases} \Rightarrow p^2 - p - 1 = 0$, onde as raízes foram encontradas na situação anterior para a SF, conhecido como número de ouro.

Agora se m e n for substituído por 3 e 4, obteremos o número plástico.

$\begin{cases} p+1 = p^3 \\ p = 1 = p^{-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^3 - p - 1 = 0^3 \\ p^5 - p^4 - 1 = 0 \end{cases}$, que possui uma única raiz real conhecido como número plástico (Sequência de Padovan).

Situação de institucionalização: Nesta fase, as informações até então adquiridas pelo grupo, devem conduzir uma busca mais aprofundada de outras formas de calcular este número

ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i8.1212

plástico através dos trabalhos de Marohnic (2012) e Iliopoulos (2015), para que haja um melhor esclarecimento acerca do tema abordado.

Situação problema II: Tomando como base a matriz geradora Q da Sequência de Padovan e sua função geradora como forma de generalização, podemos obter uma nova matriz geradora Q com outras propriedades, e uma outra função geradora para esta sequência?

Situação de ação: O professor deve estimular os estudantes para que obtenham a matriz geradora Q e a função geradora da Sequência de Padovan, tomando como base a matriz Q (Sokhuma, 2013):

$$Q=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix} \text{ e } Q^n=\begin{bmatrix}P_{n-1}&P_{n+1}&P_n\\P_n&P_{n+2}&P_{n+1}\\P_{n+1}&P_{n+3}&P_{n+2}\end{bmatrix}, n\geq 3.$$

A função geradora $G(P_{n,}x)=\dfrac{1+x}{1-x^2-x^3}$ da Sequência de Padovan, deve ser a base para a identificação de uma outra função geradora de Padovan (Ferreira, 2015). Essa função é inicializada com outros termos, servindo como base para o desenvolvimento de uma nova fórmula matemática, alterando os termos de entrada desta sequência.

Situação de formulação: Os estudantes devem identificar a matriz geradora Q de Padovan. Utilizando os valores iniciais como $P_0=1, P_1=0, P_2=1$, esta matriz pode ser dada por:

$$Q=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix} \text{ e } Q^n=\begin{bmatrix}P_n&P_{n-1}&P_{n-2}\\P_{n-1}+P_{n-2}&P_{n-2}+P_{n-3}&P_{n-3}+P_{n-4}\\P_{n-1}&P_{n-2}&P_{n-3}\end{bmatrix}, n\geq 4$$

Os alunos devem ainda encontrar a função geradora de Padovan como sendo:

$$G(P_{n,}x)=\frac{1}{1-x^2-x^3}$$

Situação de validação: Por indução, os alunos devem provar a propriedade da matriz geradora Q de Padovan, assim como a função geradora.

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita para provar o teorema da matriz geradora Q de Padovan, tem-se que para n = n+1:

$$Q^{n+1}=Q^n.Q$$

ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i8.1212

$$Q^{n+1} = \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} & P_{n-2} \\ P_{n-1}+P_{n-2} & P_{n-2}+P_{n-3} & P_{n-3}+P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (P_{n-1}+P_{n-2}+P_{n-3}) & P_n & P_{n-1} \\ (P_{n-2}+P_{n-3}+P_{n-3}+P_{n-4}+P_{n-5}) & (P_{n-1}+P_{n-2}) & (P_{n-2}+P_{n-3}) \\ (P_{n-2}+P_{n-3}+P_{n-4}) & P_{n-1} & P_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$Q^{n+1} = \begin{bmatrix} P_{(n+1)} & P_{(n+1)-1} & P_{(n+1)-2} \\ (P_{(n+1)-1}+P_{(n+1)-2}) & (P_{(n+1)-2}+P_{(n+1)-3}) & (P_{(n+1)-3}+P_{(n+1)-4}) \\ P_{(n+1)-1} & P_{(n+1)-2} & P_{(n+1)-3} \end{bmatrix}$$

w

Demonstração. Função geradora de Padovan. Uma função geradora de números é uma série formal em que os seus coeficientes obtêm informações sobre uma sucessão (a_n) com $n \in$ ¥ , sendo uma função $G(a_n, x)$ definida pela série:

$$G(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n = a_0.x^0 + a_1.x^1 + a_2.x^2 + a_3.x^3 + \ldots$$

Assim, como ocorre na Sequência de Fibonacci, para Sequência de Padovan essa função é multiplicada por x^2, x^3 nas equações abaixo. Isto ocorre devida a sua relação de recorrência, onde existe um salto do termo vizinho, e só então acontece a soma dos outros dois termos para obter o próximo.

Logo, essa função pode ser escrita da seguinte forma para a Sequência de Padovan:

$$G(P_n, x) = P_0 + P_1.x + P_2.x^2 + P_3.x^3 + P_4.x^4 + \ldots$$
$$x^2 G(P_n, x) = P_0 x^2 + P_1.x^3 + P_2.x^4 + P_3.x^5 + P_4.x^6 + \ldots$$
$$x^3 G(P_n, x) = P_0 x^3 + P_1.x^4 + P_2.x^5 + P_3.x^6 + P_4.x^7 + \ldots$$

Baseado na equação $G(P_n, x) - [x^2 G(P_n, x) + x^3 G(P_n, x)]$, e assumindo $P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 1$, temos:

ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i8.1212

$$G(P_n, x)(1 - x^2 - x^3) = P_0 + P_1.x + (P_2 - P_0).x^2$$
$$G(P_n, x)(1 - x^2 - x^3) = 1$$
$$G(P_n, x) = \frac{1}{(1 - x^2 - x^3)}$$

W

Situação de institucionalização: Quando o conhecimento é construído e validado, este irá fazer parte do patrimônio da classe (Almouloud, 2007). Todas as situações anteriormente citadas, tais como: nova matriz geradora Q da Sequência de Padovan e a função geradora, foram encontradas como forma de aprofundar os conhecimentos sobre Sequência de Padovan. Tal discussão deverá promover no sentido de compreender a evolução desses modelos matemáticos a fim de que haja alguma contribuição por parte dos estudantes acerca do tema.

7. Alguns elementos na validação da Engenharia Didática

Aqui é feita mais uma etapa onde é realizada a validação interna e externa, das fases mostradas anteriormente da sequência. Na primeira, estudos e verificações da evolução de condutas são desenvolvidos. Na segunda, as produções são comparadas antes e ao longo do estudo sobre a sequência, ou seja, pode haver ainda um experimento, onde é feita a comparação por meio de questionários e exercícios respondidos pelos estudantes ao longo de todo o processo.

Durante as duas fases iniciais da Engenharia Didática (análise prévia e a priori) conseguimos identificar algumas características que envolvem as propriedades da Sequência de Padovan. Assim, as situações aqui apresentadas podem suprir a necessidade de acesso por parte dos professores que atuam em ambiente acadêmico, visto que determinado assunto é bastante limitado em livros que trabalhem a disciplina de História da Matemática.

Logo, o professor deverá discutir com um grupo de estudantes uma tabela evolutiva da SP e do número plástico, tomando como referência da Sequência de Fibonacci, que foi a partir desta que começou o estudo de sequências numéricas, e o seu processo evolutivo.

A tabela abaixo irá auxiliar o professor visando institucionalizar, conforme a situação didática/dialética, enriquecendo a cultura acadêmica dos alunos.

Descrição e definição formal	Representação da forma matricial e função geradora da sequência de Padovan

ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i8.1212

$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$ $P_0 = P_1 = 1$ (Richard Padovan)	$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$, novos valores de entrada: $P_0 = 1, P_1 = 0, P_2 = 1$
$x^3 - x - 1 = 0$ (Voet & Schoonjans, 2009)	$1x^3 - 0x^2 - 1x^1 - 1x^0 = 0$ (Obtenção do Polinômio Característico de Padovan)
$\psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} \approx 1{,}32$ (Spinadel & Buitrago, 2009)	$\psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} \approx 1{,}32$ (Número Plástico)
$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$ $Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{bmatrix}, n \geq 3$ (Sokhuma, 2013)	$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $Q^n = \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} & P_{n-2} \\ P_{n-1} + P_{n-2} & P_{n-2} + P_{n-3} & P_{n-3} + P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \end{bmatrix}, n \geq 4$ (Sequência de Padovan)
$G(P_{n,} x) = \frac{1 + x}{1 - x^2 - x^3}$ (Ferreira, 2015)	$G(P_{n,} x) = \frac{1}{1 - x^2 - x^3}$ (Sequência de Padovan)

Tabela 2. Quadro simplificado sobre o processo evolutivo das definições matemáticas formais decorrentes do modelo de Padovan.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Com a tabela 2, é possível que os discentes sintetizem melhor o processo evolutivo referente ao conteúdo em estudo da sequência de Padovan, observando assim a inicialização da sequência com outros valores iniciais, verificando que mesmo assim não será alterada a relação de convergência (número plástico). Pode-se notar ainda que é proposta uma nova matriz geradora Q e uma função geradora, preservando a relação de recorrência e padrões destes números de Padovan.

8. Considerações Finais

Foi abordado neste trabalho, os fatores fundamentais que devem estar presentes no planejamento sistemático de uma etapa de preparação, realizando uma transposição didática envolvendo o tema da Sequência de Padovan e o número plástico. Com origem na Sequência de Fibonacci, percebemos que é possível generalizar e estender estas sequências numéricas, criando novas propriedades, muitas vezes negligenciadas por autores de livros de História da Matemática.

Para a Sequência de Padovan foram apresentadas sua formula de recorrência, o polinômio característico, a matriz e função geradora, bem como a obtenção do número plástico. Devida as dificuldades apresentadas durante o processo de aprendizagem, buscou-se aplicar a metodologia de ensino conhecida como Engenharia Didática, visto que esta manifesta uma maior atenção na modelização e planejamento das ações didáticas dos professores.

De modo particular, apesar de não receber a devida atenção por parte dos autores de livros de História da Matemática, a Sequência de Padovan e o número plástico são bons exemplos de estudo de sequência linear recorrente, bem como a sua relação de convergência entre os termos vizinhos. Esse estudo requer uma atenção por parte do professor de Matemática, onde este deve manifestar interesse pela abordagem histórico-matemática.

Tendo em vista o processo investigativo previsto por uma Engenharia Didática, pode-se constatar a descrição das situações didáticas, envolvendo algumas propriedades que foram verificadas por indução matemática além do conteúdo ter sido investigado historicamente e epistemologicamente, fazendo com que envolvam um conhecimento mais aprofundado em uma disciplina de graduação em Matemática, cuja interface com a História da Matemática se mostre mais acentuado.

Assim como o número de ouro está para a Sequência de Fibonacci, da mesma forma o número plástico está para a Sequência de Padovan. A presente proposta de Engenharia Didática, restrita às duas primeiras fases, possibilita a obtenção de uma maior cultura matemática por parte do professor, que muitas vezes é desconsiderado por parte dos autores de livros de História da Matemática.

Com isso, o objetivo de transmitir aos estudantes o entendimento dos processos matemáticos e de suas condições históricas deve ser alcançada utilizando tal metodologia de ensino. Durante as aulas, os professores não devem deixar de transmitir informações acerca do estádio atual dos conceitos, e sempre estando disponível a modificações caso tal abordagem didática não esteja fluindo como planejado.

De fato progresso aqui apresentado, ainda aborda partes introdutórias do tema da Sequência de Padovan e do número plástico. Muito se há o que estudar em temas como o comportamento em um espaço multidimensional, bem como o estudo de outras propriedades. Além disso, formas alternativas de visualização podem ser apoiadas por softwares matemáticos como: GeoGebra, Scilab, wMáxima e etc.

Diante desse objeto de estudo em associação com as duas metodologias, sendo uma de pesquisa e outra de ensino, sugerimos para trabalhos futuros a aplicação das situações-problema propostas num curso de formação inicial de professores, mais especificamente no curso de licenciatura em matemática, visando realizar significativas contribuições para a área de ensino de sequências e para estimular o lado investigativo dos futuros docentes que ainda estão em formação.

Referências

Almouloud, S. (2007). *Ag Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: Editora. UFPR.

Almouloud, S. & Coutinho, C.Q.S. (2008). Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 3(1):62-77.

Alves, F.R.V. (2016). Engenharia Didática para generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. *Educ. Matem*. Pesq., São Paulo, 18(1):61-93.

Artigue, M. (1988). Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques. *Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions*, 9.3:281-308.

Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.;Gomez, P. (1995). *Ingenieria Didática em Educacion Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Barbosa, G. S. (2016). Teoria das situações didáticas e suas influências na sala de aula. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades. São Paulo. XII *Encontro Nacional de Educação Matemática.*

Brousseau, G. (1986). *Theorisation des phénomènos d"enseignement des mathématiques*. These détat, Univesité de Bordeaus I.

Chevallard, Y.(1991*). La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Douady, R. (1995). *La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. Gomez,* P. (org.) Ingenieria Didactica en Educación Matemática. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano.

Falcón, S. & Plaza, Á. (2007). On the fibonacci k-numbers. *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(5):1615-1624.

Ferreira, R. (2015). *Números mórficos.* Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.

Iliopoulos, V. (2015). The plastic number and its generalized polynomial. *Cogent Mathematics*.

Koshy, T. (2001). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. *Wiley-Interscience*.

Marohnic, T. S. (2012). Plastic Number: Construction and Applications. *Advanced Research in Scientific Areas*.

Pais, L. C.(2002) *Didática da Matemática. Uma análise da influência francesa*. 2a ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Pereira, A.S., Shitsuka, D.M., Parreira, F.J. & Shitsuka, R. (2018). *Metodologia da pesquisa científica*. Ed. UAB/NTE/UFSM, Santa Maria/RS.

Seenukul, S. T. R. S., P;Netmanee (2015). Matrices which have similar properties to Padovan Q-Matrix and its generalized relations. *Sakon Nakhon Rajabhat University Journal of Science and Technology*, 7(2):90-94.

ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v8i8.1212

Santos, A.A.S; Alves, F.R.V. (2017). A Engenharia Didática em articulação com a Teoria das Situações Didáticas como percurso metodológico ao estudo e ensino de Matemática. *Acta Scientiae*, 19(3):447-465.

Santos, A.A.S. (2017). *Engenharia Didática sobre o estudo e ensino da fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da sequência de Fibonacci*. (Dissertação de Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará.

Sokhuma, K. (2013). Padovan q-matrix and the generalized relations. *ResearchGate*. 7:2777–2780.

Spinadel, Vera W.; Buitrago, Antonia Redondo. (2009). Towards van der Laan’s Plastic Number in the Plane. *Journal for Geometry and Graphics*, 13(2):163–175.

Stewart, I. (2000). *L´Univers des Nombres.* Paris: Belin pour la Science.

Voet, C & Schoonjans, Y. (2009). Benidictine thought as a Catalyst for 20th Century Liturgical Space-Motivations behind Dom Hans van der Laan´s Ascetic Church Arquitectury. *II Congresso International de Arquitectura Religiosa Contemporánea Entre El Concepto Y la Identidad-Ourense.*

Porcentagem de contribuição de cada autor no manuscrito

Renata Passos Machado Vieira – 60%

Francisco Regis Vieira Alves – 40%