Research, Society and Development, v. 10, n. 8, e22410817220, 2021
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v10i8.17220

Algumas aplicações do cálculo diferencial e integral

Some applications of differential and integral calculus

Algunas aplicaciones del cálculo diferencial e integral

Recebido: 15/06/2021 | Revisado: 24/06/2021 | Aceito: 27/06/2021 | Publicado: 05/07/2021

João Paulo Antunes Carvalho
http://orcid.org/0000-0001-6443-6207
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais, Brasil
carvalhojoao.jp@gmail.com@gmail.com
Josué Antunes de Macêdo
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7737-7509
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais, Brasil
Universidade Estadual de Montes Claros, Brasil.
josueama@gmail.com
Lailson dos Reis Pereira Lopes
https://orcid.org/0000-0002-2275-5047
Universidade Estadual de Montes Claros, Brasil.
lailson.lopes@unimontes.br

Resumo
O Cálculo Diferencial e Integral é a parte da Matemática que cuida, entre outros temas, do estudo das taxas de variação de grandezas. A Matemática está presente no dia a dia mais do que se pode imaginar e, por meio de um breve estudo, nota-se que ela contribui nas nossas atividades do cotidiano, seja em operações básicas, ao calcular o troco do dinheiro quando vendemos algo, ou em situações nas quais são exigidos cálculos mais complexos. A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, deve dialogar com as profissões, sendo que uma das causas do desinteresse dos alunos está associada à ausência de uma visão aplicada do conteúdo na atividade da carreira profissional. À vista disso, este trabalho propõe apresentar e discutir cinco exemplos de aplicações do Cálculo Diferencial e Integral nas Ciências e Engenharias. A metodologia utilizada é do tipo exploratória, baseada em levantamento bibliográfico. Espera-se assim, contribuir com o ensino dos temas relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral, apontando aplicações de seu uso nas diversas áreas do conhecimento.
Palavras-chave: Limites; Derivadas; Integrais; Aplicações.

Abstract
Differential and Integral Calculus is the part of Mathematics that takes care of, among other topics, the study of the rates of variation of quantities. Mathematics is present in everyday life more than one can imagine and, through a brief study, it can be seen that it contributes to our daily activities, whether in basic operations, when calculating the change for money when we sell something, or in situations where more complex calculations are required. The Discipline of Differential and Integral Calculus must dialogue with the professions, and one of the causes of the students' lack of interest is associated with the absence of an applied view of the content in the professional career activity. In view of this, this work proposes to present and discuss five examples of applications of Differential and Integral Calculus in Science and Engineering. The methodology used is exploratory, based on a bibliographic survey. It is expected, therefore, to contribute to the teaching of themes related to Differential and Integral Calculus, pointing out applications of its use in different areas of knowledge.
Keywords: Limits; Derivatives; Integrals; Applications.

Resumen
El Cálculo Diferencial e Integral es la parte de las Matemáticas que se ocupa, entre otros temas, del estudio de las tasas de variación de cantidades. La matemática está presente en la vida cotidiana más de lo que uno pueda imaginar y, a través de un breve estudio, se puede apreciar que contribuye a nuestras actividades diarias, ya sea en operaciones básicas, a la hora de calcular el cambio por dinero cuando vendemos algo, o en situaciones en las que se requieren cálculos más complejos. La Disciplina del Cálculo Diferencial e Integral debe dialogar con las profesiones, y una de las causas del desinterés de los estudiantes está asociada a la ausencia de una visión aplicada de los contenidos en la actividad de la carrera profesional. Ante esto, este trabajo se propone presentar y discutir cinco ejemplos de aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral en Ciencia e Ingeniería. La metodología utilizada es exploratoria, basada en un relevamiento bibliográfico. Se espera, por tanto, contribuir a la enseñanza de temas relacionados con el Cálculo Diferencial e Integral, señalando aplicaciones de su uso en diferentes áreas del conocimiento.
Palabras clave: Límites; Derivados; Integrales; Aplicaciones.

1. Introdução

E inegável que a Matemática está presente em nossas vidas, tendo em vista as diversas contribuições para a humanidade ao longo da história e do seu desenvolvimento, que foi realizado com a colaboração de vários matemáticos. Dentre os vários temas discutidos pela Matemática, tem-se o Cálculo Diferencial e Integral. Essa ferramenta é usada em diversos ramos das Ciências, tais como: a Física, Computação, Engenharias, Economia, Medicina e outras áreas nas quais problemas correlatos possam ser modelados matematicamente.

Assim, o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral é ministrado em diversas graduações, sendo possível citar o curso de Licenciatura em Matemática, no qual compreende-se seus conceitos e teoremas. Desse modo, na maioria das vezes, durante as aulas dessa disciplina, as operações são realizadas, porém não há uma discussão sobre os resultados, quais são as aplicações na vida real, bem como se há alguma relação com a prática profissional.

Nessa perspectiva, neste estudo surgiu a seguinte indagação: quais são as aplicações do Cálculo Diferencial e Integral nas Ciências e Engenharias? Logo, a relevância está no fato de investigar as possíveis aplicações do Cálculo Diferencial e Integral. Segundo Almeida, Fatori & Souza (2010), recorrentemente os professores não abordam o conteúdo com suas aplicações, experimentações ou descobertas. Com isso, para o discente acaba sendo um aprendizado mecânico, sem uma visualização nítida de sua utilidade e aplicação prática.

Diante dessa situação, realizou-se uma pesquisa que buscou verificar as principais aplicações do Cálculo Diferencial e Integral nas Ciências e Engenharias. Nesse sentido, este trabalho apresenta e discute cinco aplicações desse conteúdo com sua utilidade na área de trabalho de profissionais, sendo eles: engenheiros, biólogos, químicos, entre outros.

2. Metodologia

A pesquisa é do tipo exploratória que, de acordo com Gil (2008, p. 27), tem como “[...] principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores”. Nesse viés, sua relevância está em possibilitar o levantamento bibliográfico de estudos anteriores, inclusive o estudo de caso.

3. Contexto Histórico do Cálculo Diferencial e Integral

No que se refere ao seu desenvolvimento, o Cálculo Diferencial e Integral foi se constituindo com a contribuição de vários matemáticos, no entanto os protagonistas na sua criação foram: Newton e Leibniz. Dessa forma, cada matemático contribuiu no seu tempo na elaboração dos conceitos do conteúdo. À vista disso, seguindo a linha cronológica, até o século XVII, Fermat, Kepler e Arquimedes, foram alguns dos

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v10i8.17220

principais matemáticos que deram início ao seu estudo. Em seguida, Newton e Leibniz trabalharam de forma independente, produzindo os fundamentos mais importantes do conteúdo. Além disso, cabe salientar que outros grandes nomes deram suas contribuições, tais como: os irmãos Bernoulli, L'Hospital, Lagrange, D'Alembert, Cauchy, Weierstrass e Riemann (Fulini, 2017).

Isaac Newton (1642-1727) desenvolveu métodos analíticos unindo técnicas já conhecidas, que permitiram solucionar problemas de diversos tipos como: encontrar áreas, tangentes e comprimentos de curvas, assim como máximos e mínimos (Eves, 2011). Já Gottfied Wihelm Leibniz (1646-1716) teve a tarefa de elaborar a notação do Cálculo, elementos indispensáveis na teoria, como também alguns conceitos como por exemplo: regra da derivada do produto, derivada do quociente e o símbolo da integral: $\int$. (Fulini, 2017)

Além disso, Newton e Leibniz trabalharam de maneira independentes e com enfoques diferentes, dando um grande passo no desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Sendo assim, "[...] para Newton o Cálculo o ajudaria a resolver fenômenos físicos, já Leibniz queria desenvolver uma simbologia matemática universal. Por isso é creditado aos dois o título de 'Inventores' do Cálculo" (Silva, 2016, p.19)

Em muitas controversas na história, sobre quem seria o precursor do Cálculo Diferencial e Integral, Stewart (2013, p. 143) afirma que:

> Leibniz procurou desenvolver uma lógica simbólica e um sistema de notação que simplificassem o raciocínio lógico. Em particular, a versão do cálculo publicada por ele em 1684 estabeleceu a notação e as regras para encontrar as derivadas usadas até hoje. Infelizmente, uma disputa muito acirrada de prioridades surgiu em 1690 entre os seguidores de Newton e os de Leibniz sobre quem teria inventado primeiro o cálculo. Leibniz foi até mesmo acusado de plágio pelos membros da Royal Society na Inglaterra. A verdade é que cada um inventou independentemente o cálculo. Newton chegou primeiro à sua versão do cálculo, mas, por temer controvérsias, não a publicou imediatamente. Assim, a publicação do cálculo de Leibniz em 1684 foi a primeira a aparecer.

Um fato interessante da construção do Cálculo Diferencial e Integral é que o seu desenvolvimento segue a ordem inversa daquela que se encontra em livros e cursos apresentados atualmente, ou seja, os estudos sobre Cálculo Diferencial e Cálculo Integral seguiram de maneira independes. Primeiro foi desenvolvido o Cálculo Integral, com início em processo de somatórios, unidos à resolução de problemas envolvendo áreas, volumes e comprimento. Posteriormente surgiu o Cálculo Diferencial, originado de problemas que envolvessem retas tangentes e assuntos sobre máximo e mínimos (Eves, 2011).

De acordo com Eves (2011, p. 531), o matemático Cauchy deu uma explicação mais precisa do Cálculo Diferencial e Integral a partir de limite, cuja definição e seu sentido são utilizados até hoje, Cauchy definiu a derivada da função, que pode ser visto na equação (1)

$$y = f(x) \tag{1}$$

em relação a x como o limite, quando $\Delta x \to 0$, da razão da equação (2)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (2)$$

Conforme D'Ottaviano (2012 p. 52), o matemático Weierstrass (1815-1897) deu continuidade aos trabalhos de Cauchy a partir de limite, utilizando o Ɛ e δ (épsilons e deltas), limite de uma função real de variável real, que pode ser visto na equação (3)

$$y = f(x) \qquad (3)$$

quando x tende a um número real a, o que denotamos pela equação (4)

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad (4)$$

Ou em símbolos na equação (5)

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\big((\forall x)(0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)\big) \qquad (5)$$

Tornando o Cálculo Diferencial e Integral matematicamente rigoroso. Além disso, o matemático Isaac Barrow (1630-1677) notou que o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral estão relacionados entre si e são processos inversos. Em seguida, Barrow desenvolveu o Teorema Fundamental do Cálculo, que se tornou posteriormente a base de várias operações do Cálculo. (Silva, 2016)

A partir destes teoremas, torna-se notório que o Cálculo Diferencial e Integral é uma ferramenta importante no mundo acadêmico, uma vez que os conhecimentos adquiridos e gerados com suas aplicações impactam diretamente na vida do homem contemporâneo. Para isso, deve-se conhecer um pouco da sua história, como afirma Fulini (2017, p. 52), "[...] conhecer a história do Cálculo e como ela se desenvolveu é participar da sua reconstrução e reconhecer seu valor para a Educação Matemática da atualidade".

De forma análoga, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) descreve a importância da abordagem histórica na sala de aula:

Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática (Brasil, 2018, p. 298)

Em síntese, faz-se necessário ter uma breve discussão do contexto histórico do Cálculo Diferencial e Integral apresentando de forma sucinta, para que o leitor possa compreender suas origens.

4. O Cálculo Diferencial e Integral nas Graduações

De forma geral, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral consta nos cursos de Engenharia, Tecnologias, algumas Licenciaturas e nas áreas das Ciências da Natureza, dentre outras. Observa-se que tal conteúdo é importante para a formação dos acadêmicos desses cursos. A concretização dos conceitos dessa disciplina, possibilitará, futuramente, a realização de tarefas de grande complexidade e proporcionará uma melhor assimilação de outros conteúdos (Silva, 2010).

Ao longo dos últimos anos, diversos pesquisadores da área descrevem uma preocupação com o elevado índice de reprovações na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, sendo que existem diversos fatores, entre os quais tem-se: a falta de dedicação aos estudos, defasagem nos conceitos básicos da Matemática, falta de aplicabilidade do conteúdo em outras disciplinas, assim como na futura profissão, entre outros. Macêdo & Gregor (2020) apontam alguns fatores que podem contribuir para o insucesso dos alunos, relacionados, principalmente, ao domínio da Matemática básica, tempo de dedicação aos estudos e do entendimento das aulas ministradas.

> De uma forma geral, os alunos apresentam dificuldades nos conteúdos de Matemática Básica, mostrando a realidade do ensino público atual. A maioria dos alunos dedicam de uma a duas horas diárias apenas para os estudos da disciplina de CDI I, o que dificulta o aprendizado. Mais da metade dos alunos que responderam o teste, disseram não entender todas as explicações dos professores (Macêdo & Gregor, 2020, p. 21).

Além disso, como destaca Rafael & Escher (2015), é necessário rever a abordagem do Cálculo Diferencial e Integral, pois a metodologia utilizada dever ser específica em cada turma, adequando-se à realidade que ali se encontra. Dessa maneira, há uma falta de conexão entre o que é ensinado em sala e a realidade das profissões, como salientam Ribeiro Junior; Carvalho & Cariello (2010 p. 5): é comum encontrar acadêmicos na disciplina "[...] que questionem sobre a necessidade de aprender os conceitos explorados em sala de aula e a aplicação dos mesmos nos estudos futuros."

Geralmente as aulas de Matemática possuem um foco centrado no professor, que impreterivelmente expõem os conteúdos de forma retórica, "[...] ditando as regras, cabendo aos alunos apenas aceitá-las." (Ferreira, 2017, p. 20). Nessa abordagem o professor não proporciona condições para uma reflexão sobre o assunto, sobre aplicabilidade do aprendizado, quais profissionais utilizam essa ferramenta matemática no seu dia a dia de trabalho e qual é sua utilidade na vida real, por exemplo.

Sendo assim, pode-se observar que um dos fatores que favorece a reprovação de alguns alunos está ligada a não existência de relações dos conteúdos à sua futura profissão. Nesse viés, "em geral, prioriza operações, técnicas e repetição de algoritmos, entre outros fatores" (Almeida, Fatori & Souza, 2010, p. 3).

Pode se observar nas falas dos autores Ribeiro Junior; Carvalho & Cariello (2010) e Ferreira (2017) que tratar o Cálculo Diferencial e Integral, sem relacioná-lo às demais disciplinas e suas aplicações, origina um processo de aprendizado cansativo e sem propósito para as futuras profissões dos educandos. Logo, falta uma finalidade em aprender seus conceitos, tornando-se um dos possíveis fatores contribuintes do insucesso de muitos discentes na disciplina.

No entanto, ao entender que "o Cálculo é uma grande rede que interage com várias outras redes" (Rezende, 2003, p. 44) ficará claro que o Cálculo Diferencial e Integral não é um conteúdo que se restringe apenas na Matemática, mas também dialoga com outras áreas do conhecimento. Verifica-se então que não faz sentido reproduzi-lo simplesmente com definições de conceitos e listas de exercícios.

Independente do assunto relacionado ao Cálculo Diferencial e Integral, sua utilidade pode ser discutida em sala de aula como salienta Santos (2009, p. 92):

> Não importa o curso em que a disciplina é oferecida. Se ela fizer parte de grade [matriz] curricular de Economia, Administração, Bioquímica ou Engenharia, existirá um meio de torná-la próxima a realidade do estudante e sua futura profissão. É evidente que o Cálculo Diferencial e Integral, num curso de engenharia, será diferente do ministrado em bioquímica. Não pelos tópicos do conteúdo a serem estudados, mas diferentes necessidades de cada formação. A grande diferença entre eles será a forma de abordagem.

Nesse sentido, percebe-se a necessidade de se ter uma abordagem das aplicações do Cálculo Diferencial e Integral em sala de aula, como discute Reis (2001, p. 42), baseando-se entre outros, nos trabalhos do professor Baldino (1995), no qual tradicionalmente os professores apresentam os conceitos com certo rigor nos tópicos de "[...] limites, derivadas e integrais e não se verifica uma preocupação com suas aplicações, que, caso fossem melhor tratadas / exploradas, poderiam gerar novas compreensões sobre as ideias e os conceitos fundamentais do Cálculo".

Para aqueles que estão familiarizados na área, há uma outra visão sobre esse assunto, ao entrevistarem graduandos em Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Guizelini *et al*. (2005, p. 6) buscaram inventariar os aspectos que nortearam os graduandos a escolha do curso. Entre as respostas obtidas pelos autores, há uma parcela dos entrevistados que enfatizam a utilidade da Matemática no cotidiano dos profissionais. Além disso, verifica-se que na fala dos alunos, querendo ou não, necessita-se da matemática, obtendo sua abrangência nas demais áreas do conhecimento científico, como também sua usabilidade na vida real.

Nesse contexto, fica evidente quando a aplicabilidade é vista por alguns lhes trazem uma apreciação pelo conteúdo, pois assumem que a ferramenta é de suma importância nas suas carreiras profissionais.

5. Resultado e Discussão

Optou-se por apresentar e discutir nesse artigo cinco aplicações do Cálculo Diferencial Integral, uma vez que elas abrangem algumas áreas do conhecimento, isso é, desde situações de otimização ao uso das integrais para calcular áreas e volumes. Essas aplicações constam de um Roteiro Didático que foi elaborado a partir da pesquisa realizada.

Tais profissionais que fazem uso dessa ferramenta Matemática podem variar, tais como Médicos e Engenheiros. Além disso, em alguns casos, os cálculos são realizados por computadores com o objetivo de ser mais práticos no dia a dia dos usuários. Contudo, nesta pesquisa, deu-se ênfase na apresentação dos cálculos

Problema 1- Otimização no deslocamento de água

A situação aqui apresentada, foi adaptada de Menk (2005, p. 6) e refere-se à maneira na qual deve-se construir uma calha cujo formato tenha a maior capacidade de água. Pode-se observar que sua utilidade vai além da construção de calhas. Como exemplo, pode-se citar a transposição do rio São Francisco, visualizada por meio da Figura 1, que apresenta visualmente uma configuração próxima daquela considerada como ideal pelo autor *op cit*..

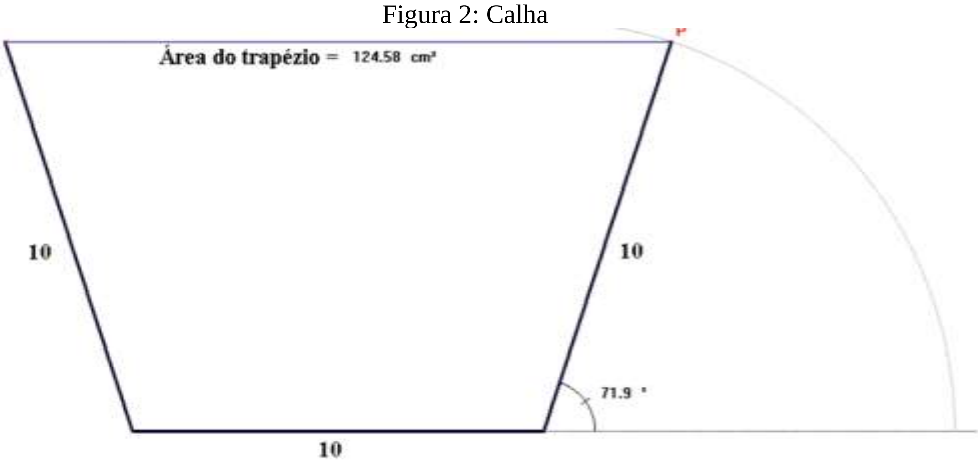
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v10i8.17220

Figura 1: Transposição do Rio São Francisco

Fonte: Maisonnave & Knapp (2018).

Observando a Figura 1, percebe-se que a situação apresentada, tem a semelhança de uma calha. Pretende-se, assim construir uma calha de seção trapezoidal como mostra a Figura 2. Dessa forma, qual deve ser o ângulo da face inclinada em relação à horizontal para que a calha tenha vazão máxima?

Figura 2: Calha

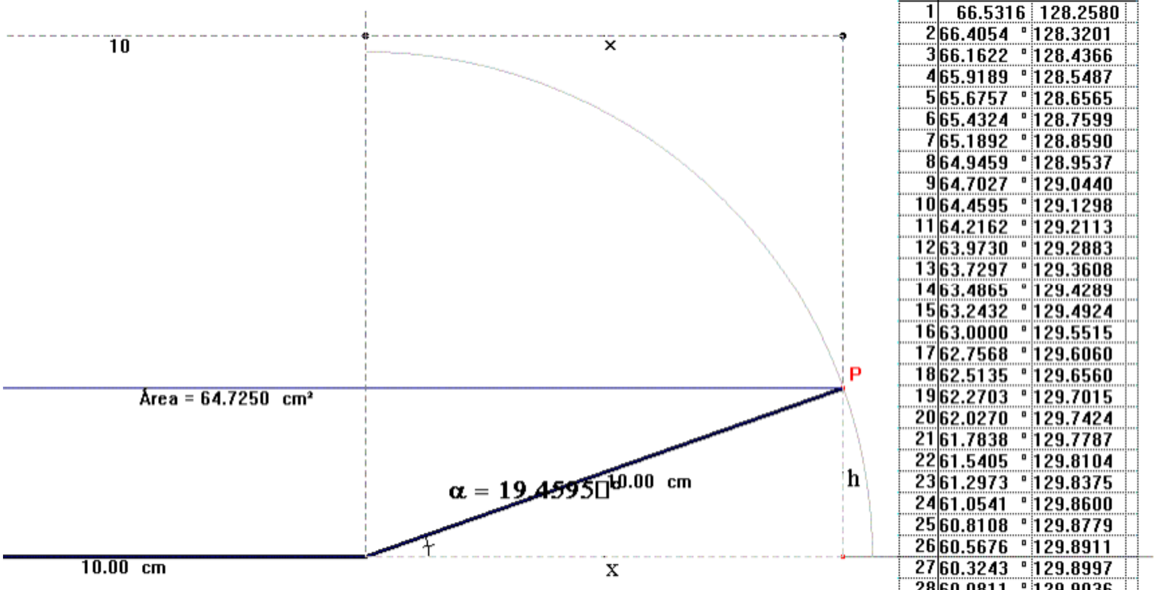


Fonte: Menk (2005, p. 6)

Construindo a figura da calha no *software Cabri Géomètre* (Figura 2), foi possível fazer variar o ângulo de inclinação e observar, simultaneamente, a variação da área da calha, cujo valor é usado no cálculo da vazão da água que deve escoar por ela.

Dessa maneira, verificou-se que, com o auxílio da tabela, o ângulo que proporciona uma vazão máxima está em torno de 60º, como pode se ver na Figura 3.

Figura 3: Cálculo do ângulo usando Tabela



	a =	Área =
1	66.5316	128.2580
2	66.4054 °	128.3201
3	66.1622 °	128.4366
4	65.9189 °	128.5487
5	65.6757 °	128.6565
6	65.4324 °	128.7599
7	65.1892 °	128.8590
8	64.9459 °	128.9537
9	64.7027 °	129.0440
10	64.4595 °	129.1298
11	64.2162 °	129.2113
12	63.9730 °	129.2883
13	63.7297 °	129.3608
14	63.4865 °	129.4289
15	63.2432 °	129.4924
16	63.0000 °	129.5515
17	62.7568 °	129.6060
18	62.5135 °	129.6560
19	62.2703 °	129.7015
20	62.0270 °	129.7424
21	61.7838 °	129.7787
22	61.5405 °	129.8104
23	61.2973 °	129.8375
24	61.0541 °	129.8600
25	60.8108 °	129.8779
26	60.5676 °	129.8911
27	60.3243 °	129.8997
28	60.0811 °	129.9036
29	59.8378 °	129.9028
30	59.5946 °	129.8973
31	59.3514 °	129.8871

Fonte: Menk (2005, p. 6)

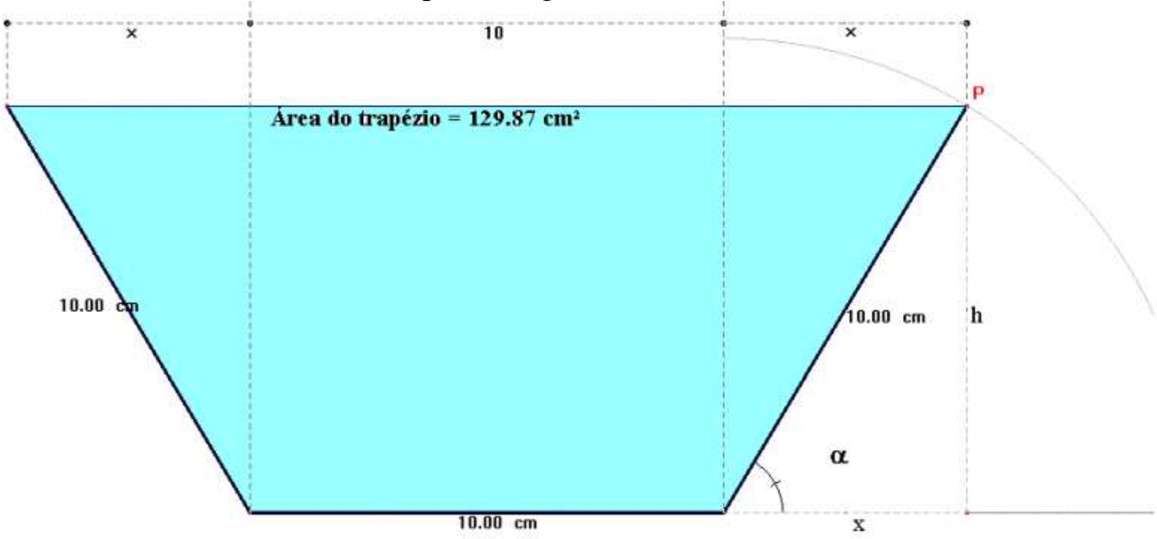
Observando a Figura 3 e fazendo os cálculos pode-se chegar ao valor exato do ângulo: Considerando-se as equações (6) e (7):

$$A = \frac{(B + b)h}{2} \qquad (6)$$

$$B = 10 + 2x \qquad (7)$$

Na Figura 4, observa-se a área do trapézio e o ângulo da face lateral.

Figura 4: Ângulo da Face Lateral



Fonte: Menk (2005, p. 6)

Tem-se, primeiramente, que obter os valores de x e de h que estão em função do ângulo da face lateral da calha, que forma com a horizontal mostrado na Figura 4, de acordo com a equação (8).

$$\begin{cases} sen\alpha = h/10 \\ cos\alpha = x/10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h = 10sen\alpha \\ x = 10cos\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B = 10 + 2x \\ B = 10 + 2(10cos\alpha) \end{cases} \quad (8)$$

Substituindo na fórmula da área do trapézio, de acordo com a equação (9):

$$A = \frac{(10 + 20cos\alpha + 10)10sen\alpha}{2} = 100sen\alpha + 100sen\alpha.cos\alpha \quad (9)$$

Derivando em relação a α tem-se, de acordo com a equações (10), (11), (12), (13)

$$A`(\alpha) = 100cos\alpha + 100cos\alpha.cos\alpha - 100sen\alpha.sen\alpha \quad (10)$$

$$A`(\alpha) = 100cos\alpha + 100cos^2\alpha - 100sen^2\alpha \quad (11)$$

$$A`(\alpha) = 100cos\alpha + 100cos^2 - 100(-cos^2\alpha + 1) \quad (12)$$

$$A`(\alpha) = 100(2cos^2\alpha + cos\alpha - 1) \quad (13)$$

Obtendo-se o ponto crítico, de acordo com a equações (14):

$$100(2cos^2\alpha + cos\alpha - 1) = 0 \rightarrow 2cos^2\alpha + cos\alpha - 1 = 0 \quad (14)$$

Fazendo $cos\alpha = x$, conforme a equação (15):

$$2x^2 + x - 1 = 0 \quad (15)$$

Resolvendo essa equação em função de x, obtém-se:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 \quad (16)$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{4} \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -1 \quad (17)$$

Substituindo os valores de x encontrados em (17), de acordo com equações (18) e (19):

$$cos\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60° \quad (18)$$

$$cos\alpha = -1 \rightarrow \alpha = 180° \qquad (19)$$

não convém

Portanto, a vazão máxima acontecerá quando o ângulo que a face lateral da calha forma com a horizontal for de 60°.

Problema 2 - *Otimização de material para a construção civil*

Esse exemplo foi adaptado de Flexa (2017, p. 45). Considere uma situação na qual pretende-se construir as paredes de um hangar retangular com a frente aberta (apenas três paredes). Após todos os cálculos, levando-se em consideração a quantidade de material disponível, concluiu-se que seria possível ser construído um total de 40 metros de parede. Nesse caso, deve-se dimensionar o comprimento de cada parede para que a área construída seja a maior possível.

Solução:

O comprimento total das paredes é 40m. Chamando o comprimento das paredes laterais de x e o comprimento da parede de fundo de 40-2x. Desse modo as dimensões medidas em metros serão $x, (40 - 2x), x$:

Como a estrutura é retangular, pode-se estabelecer o fato de que a área total, é dada pela equação (20):

$$A = x(40 - 2x) \qquad (20)$$

Portanto,

$$A = f(x) = 40x - 2x^2 \qquad (21)$$

Derivando em relação a x, tem-se a equação (22):

$$f'(x) = 40 - 4x \qquad (22)$$

Obtendo o ponto crítico nas equações (23), (24) e (25)

$$f'(x) = 40 - 4x = 0 \qquad (23)$$

$$4x = 40 \quad (24)$$

$$x = 10 \quad (25)$$

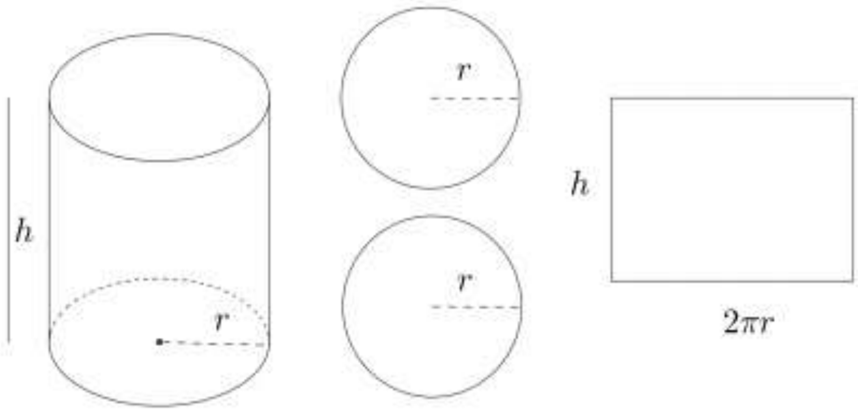
Ou seja, para x = 10, consequentemente o fundo será igual a 20 m, tem-se A = 200 m^2, como a maior área possível dadas essas condições.

Problema 3 - Minimização de custos de produção

Exemplo extraído de Soares (2015, p. 50). Uma indústria de óleo de cozinha deseja embalar seu produto em latas cilíndricas de 1 litro. Quais devem ser as dimensões da lata que minimizam o custo do metal para produzi-la?

Para a modelagem da função, considerou-se r e h o raio e a altura do cilindro, respectivamente. A lata com menor custo será aquela que possui a menor área da superfície. Na Figura 5 tem-se uma representação do formato da lata:

Figura 5: Planificação



Fonte: Soares (2015, p. 51)

Pela Figura 5, é possível visualizar que a área da superfície da lata cilíndrica é dada pela equação (26):

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad (26)$$

Para que seja eliminada uma variável nesta expressão, observa-se que o volume da lata deve ser de 1 litro, o equivalente a 1000 cm^3. Então, V = $\pi r^2 h$ = 1000, no qual resulta na equação (27):

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \quad (27)$$

Substituindo isto na expressão da área A, obtém-se a equação (28):

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v10i8.17220

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, \tag{28}$$

$$r > 0$$

Agora, a solução do problema é obtida minimizando está função, derivando-a em função de *r*, obtendo-se assim a equação (29):

$$A'(r) = 4\pi r - 2000r^{-2} \tag{29}$$

E igualando a zero nas equações (30), (31), (32), (33), (34), (35):

$$4\pi r - 2000r^{-2} = 0 \tag{30}$$

$$4\pi r = 2000r^{-2} \tag{31}$$

$$\frac{4\pi}{2000} = r^{-3} \tag{32}$$

$$\frac{4\pi}{2000} = \frac{1}{r^3} \tag{33}$$

$$r^3 = \frac{500}{\pi} \tag{34}$$

$$r \cong 5{,}42cm \tag{35}$$

Substituindo isto na equação (27) obtemos a altura, conforme pode ser visto na equação (36):

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \cong \frac{1000}{\pi(5{,}42)^2} \cong 10{,}84cm \tag{36}$$

Problema 4 - Medição do débito cardíaco

Exemplo extraído de Alderete (2017, p.1). Débito cardíaco é o volume de sangue bombeado pelo coração por unidade de tempo. A medição do débito cardíaco ajuda os Médicos a avaliar o estado em que se encontra o coração de uma pessoa que sofreu um ataque cardíaco e, com isso, ele irá planejar o tratamento a ser seguido.

Nesse exemplo, utilizou-se o método termodiluição para medir o debito cardíaco. Este procedimento faz uso das integrais impróprias.

A presente aplicação foi retirada de um projeto de pesquisa desenvolvido pela estudante Andrielle Camargo de Alderete, que utilizou dados reais para o desenvolvimento da pesquisa (Alderete, 2017).

Com o intuito de determinar a Medição do Débito Cardíaco (MDC), através das temperaturas do termistor, obteve-se uma equação com a utilização do método de integrais impróprias, que tem como conceito ser uma integral definida $\int_a^b f(x)\ dx$, a qual a função f definida pode ter um intervalo infinito ou ter uma descontinuidade infinita em $[a,\ b]$ (Stewart, 2013). Mediante esse método, obteve-se a equação (37)

$$F = \frac{rV(T_C - T_S)}{\int_0^{\infty} T_{var}\ dt} \quad (37)$$

Assim como Hoffmann & Bradley (1999), em que: F é o Débito cardíaco, T_s é a Temperatura da solução, T_C é a Temperatura do sangue no corpo do paciente; T_{var} é o Produto de variação de temperatura; V é o Volume da solução aplicada e r é o Fator de correção associado à perda de resfriamento da solução.

De maneira posterior ao levantamento de dados, utilizou-se a função $T_{var} = 0{,}2t^2e^{-0{,}43t}$ disponibilizada pelos autores em uma das atividades, para modelar a variação de temperatura. Por meio dela utilizou-se o método de integrais por partes empregando a fórmula $\int udv = uv - \int vdu$. Ao determinar o débito cardíaco do paciente A, inicialmente substituiu-se os dados $T_C = 36°C \quad T_C = 36°C, T_S\ = 5°C, V\ = 12ml\ e\ r\ = 0{,}9$ na equação (37) obtendo a equação (38):

$$F = \frac{(0{,}9)(12)(36-5)}{\int_0^{\infty} 0{,}2t^2e^{-0{,}43t}\ dt} = \frac{334{,}8}{(0{,}2)\ \lim\limits_{a\to\infty}\left[\int_0^a t^2e^{-0{,}43t}dt\right]} \quad (38)$$

Calculou-se a integral imprópria por meio do método de integrais por partes que pode ser visto nas equações (39), (40), (41), (42), (43):

$$\lim_{a\to\infty}\left[\int_0^a t^2e^{-0{,}43t}dt\right] \quad (39)$$

$$\int udv = uv - \int vdu \quad (40)$$

$$u = t^\wedge 2 \qquad dv = e^{-0{,}43t} \quad (41)$$

$$du = 2t \qquad v = -\frac{e^{-0{,}43t}}{0{,}43} \quad (42)$$

$$\int_0^a t^2e^{-0{,}43t}dt = \frac{-t^2e^{-0{,}43t}}{0{,}43}\Bigg|\begin{matrix}a\\0\end{matrix} - \int_0^a -\frac{e^{-0{,}43t}2t}{0{,}43}dt \quad (43)$$

Resolvendo por partes novamente, obtém-se as equações (44), (45), (46), (47):

$$\int_0^a t^2e^{-0{,}43t}dt = \frac{-a^2}{0{,}43e^{0{,}43a}} + \frac{2}{0{,}43}\left[-\frac{te^{-0{,}43t}}{0{,}43} - \frac{e^{-0{,}43t}}{0{,}43^2}\right]\Bigg|\begin{matrix}a\\0\end{matrix} \quad (44)$$

$$\int_0^a t^2e^{-0{,}43t}dt = \frac{-a^2}{0{,}43e^{0{,}4\,3a}} + \frac{2}{0{,}43}\left[-\frac{ae^{-0{,}43a}}{0{,}43} - \frac{e^{-0{,}43a}}{0{,}43^2} + \frac{1}{0{,}43^2}\right] \quad (45)$$

$$\int_0^a t^2e^{-0{,}43t}dt = \frac{-a^2}{0{,}43e^{0{,}43a}} - \frac{2a}{0{,}43^2e^{0{,}43a}} - \frac{2}{0{,}43^3e^{0{,}43a}} + \frac{2}{0{,}43^3} \quad (46)$$

$$\lim_{a\to\infty}\left[-\frac{a^2}{0{,}43e^{0{,}45a}} - \frac{2a}{0{,}43^2e^{0{,}43a}} - \frac{2}{0{,}43^3e^{0{,}43a}} + \frac{2}{0{,}43^3}\right] = \frac{2}{0{,}43^3} \quad (47)$$

Aplicando a regra de L'Hospital, obteve-se a equação (48):

$$\lim_{a\to\infty} - 0 - 0 - 0 + \frac{2}{0{,}43^3} \tag{48}$$
$$= \frac{2}{0{,}43^3}$$

Substituindo na equação (38) obtemos a equação (49):

$$F = \frac{334{,}8}{\frac{(0{,}2).\,2}{0{,}43^3}} \approx \frac{334{,}8}{(0{,}4).\,(12{,}577751)} \approx \frac{334{,}8}{5{,}031004} \approx \frac{66{,}54735ml}{s} \approx \frac{66{,}55ml}{s} \tag{49}$$
$$\approx 3{,}99l/min$$

Para tanto, teve-se, aproximadamente, $3{,}99l/min$ como resultado um MDC, ou seja, trata-se da quantidade de sangue ejetado pelos ventrículos por unidade de tempo. Nesse viés, cabe salientar que pode ser considerado saudável quando está entre 4 e 5 litros por minuto. Logo, verificou-se que o paciente está próximo ao que é considerado saudável.

Problema 5 - Medição Otimizando o lucro

Essa situação-problema foi extraída de Hoffmann & Bradley (1999, p. 213). Um fabricante produz uma fita virgem a um custo de R$ 2,00 a unidade. As fitas vêm sendo vendidas a R$ 5,00 a unidade; por este preço, são vendidas 4000 fitas por mês. O fabricante pretende aumentar o preço da fita e calcula que, para cada R$ 1,00 de aumento no preço, menos 400 fitas serão vendidas por mês. Qual deve ser o preço de venda para que o lucro seja máximo?

Solução: Sendo *x* o novo preço de vendas das fitas e *p(x)* o lucro correspondente. O objetivo e maximizar o lucro. Para iniciar será expresso o lucro em palavras na equação (50):

$$Lucro = (número\ de\ fitas\ vendidos)\ (lucro\ por\ fita) \tag{50}$$

Como 4000 fitas são vendidas por mês, quando o preço é R$5,00 e menos 400 fitas serão vendidas para cada R$1,00 de aumento no preço, tem-se a equação (51):

$$Número\ de\ fitas\ vendidas = 4000 - 400\ (número\ de\ aumento\ de\ 1\ real) \tag{51}$$

O número de aumento de R$1,00 no preço é a diferença *x* - 5 entre o preço novo e o antigo nas equações (52), (53), (54):

$$Número\ de\ fitas\ vendidas = 4000 - 400\ (x - 5) \tag{52}$$
$$Número\ de\ fitas\ vendidas = 400[10 - (x - 5)] \tag{53}$$
$$Número\ de\ fitas\ vendidas = 400(15 - x) \tag{54}$$

O lucro por fita vendida é simplesmente a diferença entre o preço de venda *x* e o custo R$ 2,00. Então na equação (55) obtemos

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v10i8.17220

$$Lucro\ por\ fita = x - 2 \qquad (55)$$

Combinando as equações (54) e (55) obtém-se a equação (56):

$$P(x) = 400(15 - x)(x - 2) \qquad (56)$$

O objetivo é determinar o máximo absoluto da função de lucro $P(x)$. Para estabelecer qual é o intervalo relevante para este problema basta observar que: como foi dito, o novo preço será mais alto que o antigo, desse modo deve-se ter: $x \geq 5$. Por outro lado, o número de fitas vendidas é $400(15 - x)$, um número que se soma negativo (e, portanto, não tem significativo físico) para $x \leq 15$. Assim, pode-se restringir o problema de otimização ao intervalo fechado $5 \leq x \leq 15$.

Para determinar os pontos críticos basta calcular a derivada usando as regras do produto e da multiplicação por uma constante, resolvendo obtemos as equações (57), (58), (59), (60), (61):

$$P(x) = 400(15 - x)(x - 2) \qquad (57)$$

$$P'(x) = 400[(15 - x)(1) + (x - 2)(-1)] \qquad (58)$$

$$P'(x) = 400(15 - x - x + 2) \qquad (59)$$

$$P'(x) = 400(17 - 2x) \qquad (60)$$

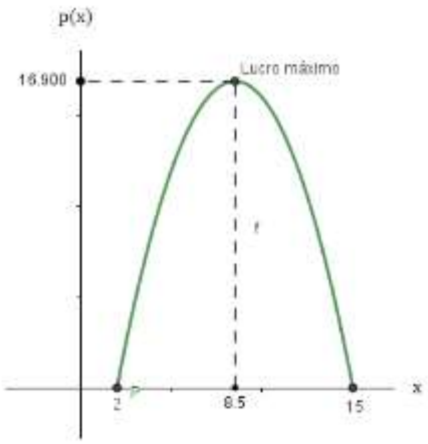
$$17 - 2x = 0 \ \rightarrow \ x = 8{,}5 \qquad (61)$$

Comparando os valores da função de lucro:

$$P(5) = 12.000; \quad P(8{,}5) = 16.900 \ \text{ e } \ P(15) = 0$$

O gráfico de $P(x)$ incluído apenas para fins ilustrativos, aparece na Figura 6:

Figura 6 - Gráfico da função lucro



Fonte: Hoffmann & Bradley (1999) adaptado.

É possível se ver no gráfico da Figura 6 que ao observar o ponto crítico e os extremos do intervalo, chega-se à conclusão que o maior lucro possível é R$16.900,00, que será obtido se as fitas forem vendidas por R$8,50 a unidade.

6. Considerações Finais

Este trabalho teve como principal objetivo identificar algumas aplicações do Cálculo Diferencial e Integral nas ciências e engenharias. Para alcançar esse objetivo foi realizado uma pesquisa bibliográfica, a fim de identificar em livros, artigos, dissertações entre outros, as aplicações do Cálculo Diferencial. Com os dados obtidos, foi elaborado um roteiro didático contemplando as aplicações.

Nessa abordagem, foi possível verificar as diferentes formas que se pode utilizar o Cálculo Diferencial e Integral. Nesse sentido, propõe-se utilizar o roteiro didático de aplicações como um fator que venha agregar relevância para o estudo da disciplina, pois é muito comum alunos questionarem a utilidade do assunto estudado. O roteiro didático de aplicações não tem intuito de substituir os métodos e técnicas já utilizadas, pois são importantes no processo de ensino e aprendizagem.

Sugere-se como pesquisas futuras, a elaboração de roteiros didáticos de aplicações específicos para cada curso superior e posteriormente a realização de testes com alunos desses respectivos cursos, possibilitando uma análise de resultados focado em uma única área de conhecimento, assim como também a elaboração de um roteiro didático de aplicações em apenas uma área de atuação profissional.

Conclui-se que, a partir dos resultados obtidos por meio desta pesquisa, abriu-se possibilidades, não só para os participantes da socialização que tiveram essa experiência, como também para aqueles que venham ministrar aula de Cálculo Diferencial e Integral.

Tais ações podem ser pautadas no aprimoramento do roteiro didático, atribuindo mais aplicações e adaptando à realidade específica do curso superior que se pretende aplicar, tornando o roteiro didático como um recurso extra para as aulas de Cálculo Diferencial e Integral.

Sugere-se para estudos futuros, que seja desenvolvido roteiros didáticos com aplicações específicas, de acordo com a realidade de cada curso superior, sendo que posteriormente realize um teste com alunos desse respectivo curso, possibilitando uma análise de resultados focados em uma única área de conhecimento, assim como também a elaboração de um roteiro didático de aplicações em apenas uma área de atuação profissional.

Referências

Alderete, A. C. & Silveira, K. B. V. (2017). Integração por partes: resolução de integrais impróprias para a obtenção do débito cardíaco. Anais do Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão. 8(2).

Almeida, L. M. W.; Fatori, L. H. & Souza, L. G. S. (2010) Ensino de cálculo: uma abordagem usando modelagem matemática. *Revista Ciência e Tecnologia*, 10 (16), 01-18.

Baldino, R. R. (1995). *Assimilação solidária onze anos depois*. Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro.

Brasil (2018). Base Nacional Comum Curricular. Brasília, MEC.

D'Ottaviano, I. M. L. & Bertato, F. M. (2012). George Berkeley e os fundamentos do cálculo diferencial e integral. *Cadernos de História e Filosofia da Ciência (UNICAMP)*, Campinas, 4, 33-73.

Eves, H. (2011). *Introdução a História da Matemática* (2a ed.). São Paulo, UNICAMP.

Ferreira, A. S. (2017). *Diferentes abordagens do conceito de derivada: uma proposta de investigação matemática*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). 158 f. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Flexa, J. M. N. (2021). *Cálculo diferencial e integral: determinação de áreas e volumes e outras aplicações*. 49f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT). Universidade Federal do Amapá Macapá.

Fulini, M. (2017). *História do cálculo diferencial e integral*. 56 f. Monografia (conclusão de curso). Universidade Federal de São João Del-Rei.

Gil, A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social* (6a ed.). São Paulo: Atas.

Guizelini, A. *et al*. (2005). O "Gostar de Matemática": em busca de uma interpretação psicanalítica. *Boletim de Educação Matemática*, 18(23), 23-40.

Hoffmann, L. D. & Bradley, G. L. (1999). *Cálculo: um curso moderno e suas aplicações* (6a ed.). Rio de Janeiro: LTC.

Macêdo, J. A. & Gregor, I. C. S. (2020). Dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem de cálculo diferencial e integral. *Educação Matemática Debate,* 4 (10), e202008. Doi: https://doi.org/10.24116/emd.e202008.

Menk, L. F. F.; Póla, M. R. & Barbosa, S. M. (2005). Resolução de problemas de cálculo diferencial integral, aplicados à engenharia, usando múltiplas representações e software de geometria dinâmica. *Anais do XXXIII Congresso Brasileiro de ensino de Engenharia*. Campina Grande PB, 1-11.

Maisonnave, F. & Knapp, E. (2018). Após 1 ano, transposição do São Francisco já retira 1 milhão do colapso: Canal encheu de água reservatórios no interior de Paraíba e Pernambuco. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/cotidiano/2018/03/apos-1-ano-transposicao-do-sao-francisco-ja-retira-1-milhao-do-colapso.shtml. Acesso em 13 jun. 2021.

Rafael, R. C. & Escher, M. A. (2015). Evasão, baixo rendimento e reprovações em cálculo diferencial e integral: uma questão a ser discutida. *Anais do VII Encontro Mineiro de Educação Matemática*. Juiz de Fora (MG), 1-12.

Reis, F. S. (2001). A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 302 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas.

Rezende, W. M. (2003). *O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. 450 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo.

Ribeiro Junior, P. C. E; Carvalho, T. M. M. & Cariello, D. (2010). Aplicações de cálculo diferencial às ciências naturais e humanas: exercícios de reflexão e curiosidades. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática, Cultura e Diversidade*. Salvador, 1-10.

Santos, J. V. L. (2009). *Formação básica em engenharia: a articulação das disciplinas pelo cálculo diferencial e integral*. 202 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Silva, I. L. N. (2016). *Equalizações diferenciais: aspectos históricos, teoria e aplicações em física*. 36 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba.

Silva, M. A. *et al.* (2010). Dificuldades de aprendizagem na disciplina de Cálculo Diferencial e integral: estudo de caso com alunos do curso de licenciatura em Química. *Anais do V Congresso de Pesquisa e Inovação da Rede Norte Nordeste de Educação Tecnológica*-CONNEPI. Maceio, 11-20.

Soares, F. P. B. (2015). *Conceitos e ideias do cálculo diferencial e integral*. 119 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) Centro de Ciências Exatas, Universidade estadual de Maringá.

Stewart, J. (2013). *Cálculo* (Vol. 1. 7a ed.) São Paulo: Cengage Learning.