Research, Society and Development, v. 9, n.1, e165911767, 2020
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i1.1767

Engenharia didática de primeira geração no Ensino Superior: generalização e extensão da sequência de Fibonacci

First generation didactic engineering in Higher Education: generalization and extension of the Fibonacci sequence

Ingeniería didáctica de primera generación en Educación Superior: generalización y extensión de la secuencia de Fibonacci

Recebido: 29/09/2019 | Revisado: 15/10/2019 | Aceito: 23/10/2019 | Publicado: 31/10/2019

Rannyelly Rodrigues de Oliveira
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3850-5237
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil
E-mail: ranny.math.06@gmail.com
Maria Helena de Andrade
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2931-1868
Rede Municipal de Ensino de Fortaleza, Brasil
E-mail: helenaeducadoramat@gmail.com
Francisco Régis Vieira Alves
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3710-1561
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Brasil
E-mail: fregis@ifce.edu.br

Resumo

Este trabalho faz uma reflexão sobre a Dissertação desenvolvida; no programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Estado do Ceará; pelo docente da SEDUC/CE Arlem Atanazio dos Santos. Nesse sentido, este trabalho tem o objetivo de realizar uma análise das etapas da Engenharia Didática que Santos (2017) construiu no Ensino Superior. Assim, tem-se dois objetivos específicos: (*i*) evidenciar o potencial metodológico (dessa engenharia) de transposição didática de modelos matemáticos não triviais; (*ii*) oportunizar ao leitor o desenvolvimento de uma concepção epistemológica sobre o ensino de História da Matemática com ênfase no processo histórico-evolutivo do modelo de Fibonacci. Essa dissertação assumiu a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa em complementaridade com a Teoria das Situações Didáticas. Numa visão panorâmica, foram abordadas definições e relações matemáticas oriundas da generalização e extensão da Sequência de Fibonacci. Contudo, para a sala de aula, foi considerada a Fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão dessa sequência. Assim sendo, seguindo o paradigma dessa engenharia, compreende-se que foi realizada uma transposição didática do modelo Fibonacciano generalizado, em que a experiência didática foi efetivada no Ensino Superior. O que pode oportunizar o desenvolvimento de uma concepção epistemológica do ensino de História da Matemática durante a formação inicial de professores de Matemática. Além do mais, diante do processo histórico-evolutivo que envolve o modelo de Fibonacci, pode-se concluir que o surgimento de novas definições e propriedades contribuem para ampliar o repertório da História da Matemática.

Palavras-chave: Engenharia Didática. Sequência de Fibonacci. Fórmula de Binet. Teoria das Situações Didáticas.

Abstract

This paper reflects on the dissertation developed; in the Graduate Program in Science and Mathematics Teaching of the Federal Institute of Education, Science and Technology of the State of Ceará; SEDUC / CE teacher Arlem Atanazio dos Santos. In this sense, this work aims to perform an analysis of the Didactic Engineering stages that Santos (2017) built in Higher Education. Thus, there are two specific objectives: (*i*) to highlight the methodological potential (of this engineering) of didactic transposition of nontrivial mathematical models; (*ii*) provide the reader with the opportunity to develop an epistemological conception of the teaching of history of mathematics with emphasis on the historical-evolutionary process of the Fibonacci model. This dissertation assumed Didactic Engineering as a research methodology in complementarity with Didactical Situation Theory. In a panoramic view, definitions and mathematical relations arising from the generalization and extension of the Fibonacci Sequence were approached. However, for the classroom, the Binet Formula was considered as a model of generalization and extension of this sequence. Thus, following the paradigm of this engineering, it is understood that a didactic transposition of the generalized Fibonaccian model was performed, in which the didactic experience was carried out in Higher Education. This can lead to the development of an epistemological conception of the teaching of history of mathematics during the initial formation of mathematics teachers. Moreover, given the historical-evolutionary process that involves the Fibonacci model, it can be concluded that the emergence of new definitions and properties contribute to broaden the repertoire of the history of mathematics.

Keywords: Didactic Engineering. Fibonacci Sequence. Binet's Formula. Didactic Situations Theory.

Resumen

Este artículo reflexiona sobre la disertación desarrollada; en el Programa de Posgrado en Enseñanza de Ciencias y Matemáticas del Instituto Federal de Educación, Ciencia y Tecnología del Estado de Ceará; Profesor SEDUC / CE Arlem Atanazio dos Santos. En este sentido, este trabajo tiene como objetivo realizar un análisis de las etapas de Ingeniería Didáctica que Santos (2017) construyó en Educación Superior. Por lo tanto, hay dos objetivos específicos: (*i*) resaltar el potencial metodológico (de esta ingeniería) de la transposición didáctica de modelos matemáticos no triviales; (*ii*) brinde al lector la oportunidad de desarrollar una concepción epistemológica de la enseñanza de la historia de las matemáticas con énfasis en el proceso histórico-evolutivo del modelo de Fibonacci. Esta disertación asumió la Ingeniería Didáctica como una metodología de investigación en complementariedad con la Teoría de la Situación Didáctica. En una vista panorámica, se abordaron definiciones y relaciones matemáticas derivadas de la generalización y extensión de la secuencia de Fibonacci. Sin embargo, para el aula, la Fórmula Binet se consideró como un modelo de generalización y extensión de esta secuencia. Así, siguiendo el paradigma de esta ingeniería, se entiende que se realizó una transposición didáctica del modelo generalizado de Fibonacci, en el que la experiencia didáctica se realizó en la Educación Superior. Esto puede conducir al desarrollo de una concepción epistemológica de la enseñanza de la historia de las matemáticas durante la formación inicial de los profesores de matemáticas. Además, dado el proceso histórico-evolutivo que involucra el modelo de Fibonacci, se puede concluir que la aparición de nuevas definiciones y propiedades contribuyen a ampliar el repertorio de la historia de las matemáticas.

Palabras clave: Ingeniería Didáctica. Secuencia de Fibonacci. La fórmula de Binet. Teoría de situaciones didácticas.

1. Introdução

Este trabalho faz uma análise sobre a Dissertação defendida e desenvolvida; no curso a nível de Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE; pelo docente Arlem Atanazio dos Santos, o qual atualmente é vinculado à rede de Ensino Básico Regular do Estado do Ceará, Secretaria de Educação – SEDUC.

Essa dissertação foi elaborada na área de concentração do Ensino de Matemática, sob o viés da vertente francesa da Didática da Matemática, na linha de pesquisa que investiga sequências generalizadas e sua possível transposição didática. Nesse sentido, a dissertação é intitulada da seguinte forma: “Engenharia Didática sobre o Estudo e Ensino da Fórmula de Binet como Modelo de Generalização e Extensão da Sequência de Fibonacci”.

A pesquisa em discussão foi organizada em sete seções. Sendo a primeira seção introdutória, onde o autor apresentou o objeto a ser investigado, a problemática, justificativa, questão norteadora e os objetivos definidos. O segundo capítulo abrangeu a metodologia de pesquisa denominada de Engenharia Didática – ED em complementaridade com a Teoria das Situações Didáticas – TSD. Nas terceira e quarta seções, foi feita uma discussão de definições e relações matemáticas oriundas da generalização e extensão da Sequência de Fibonacci – SF.

No capítulo 5, foram apresentadas a concepção e análise *a priori* das situações didáticas e a descrição das atividades propostas. Na seção posterior (capítulo 6), foi abordado sobre a experiência didática que foi desenvolvida no Ensino Superior especificamente no curso de Licenciatura em Matemática do IFCE. As situações didáticas tinham como conteúdo geral a função geradora e a extensão da SF. Assim, nessa seção, o autor avalia o desempenho dos alunos e faz a análise *a posteriori* e validação da pesquisa. Por fim, na última seção, foram apresentadas as considerações finais evidenciando sua relevância no campo da Didática da Matemática e sua contribuição para fundamentar trabalhos futuros.

Diante do exposto, este trabalho tem o objetivo, por meio da síntese da dissertação de Santos (2017), de realizar uma análise das etapas da ED que ele construiu no Ensino Superior. E, com isso, foram definidos dois objetivos específicos: (*i*) evidenciar o potencial metodológico (da ED) de transposição didática de modelos matemáticos não triviais; (*ii*) oportunizar ao leitor o desenvolvimento de uma concepção epistemológica sobre o ensino de HM com ênfase no processo histórico-evolutivo do modelo de Fibonacci.

2. Metodologia

Esta resenha é uma revisão teórica sobre a ED, de primeira geração desenvolvida no Ensino Superior, sobre a generalização e extensão da SF. Conforme Cervo, Bervian e Silva (2007, p.61), a pesquisa bibliográfica possui caráter descritivo e analítico, com a finalidade de possibilitar ao pesquisador adquirir fundamentação para discutir sobre seu objeto de investigação, de maneira que valide suas hipóteses de pesquisa. Além do mais, esta pesquisa foi desenvolvida numa abordagem qualitativa.

De acordo com Pereira et al. (2018, p. 67), a pesquisa qualitativa é feita no campo de investigação por meio da coleta natural e direta de dados, os quais são explícitos durante o processo descritivo e analítico, assim, "a preocupação do processo é predominante em relação à do produto, o "significado" que as pessoas dão as coisas e a sua vida são focos de atenção para o pesquisador e, a análise de dados e informações tende a seguir um processo indutivo".

Dessa maneira, este trabalho apresenta uma síntese da dissertação de Santos (2017), através do seguinte percurso metodológico: primeiramente, será discutido sobre a metodologia de pesquisa e a teoria de ensino adotada, a segunda parte abrangerá o campo epistêmico-matemático Fibonacciano, a terceira seção trata da transposição didática da SF e, por fim, engloba-se a vivência didática (experimentação), coleta e discussão dos dados.

3. Engenharia Didática em Complementaridade com a TSD

Santos (2017) assumiu a ED como percurso metodológico para o desenvolvimento de sua pesquisa. Nesse sentido, como referencial teórico, foram considerados os trabalhos dos autores: Almouloud (2007), Artigue (1995) e Pais (2002). Para isso, é relevante compreender as etapas que estruturam a ED: (i) análises prévias ou preliminares, (ii) concepção e análise *a priori*; (iii) experimentação e (iv) análise *a posteriori* e a validação.

Fundamentado na concepção de Almouloud (2007), o autor descreve a fase inicial da ED como uma revisão bibliográfica; de artigos científicos, dissertações, teses, dentre outras fontes; que permite identificar problemas relativos ao ensino e aprendizagem da Matemática, a fim de delimitar uma problemática e definir um objeto a ser investigado. E, se baseando no quadro didático geral proposto por Artigue (1995), as análises prévias contemplam os seguintes aspectos: "a epistemológica dos conteúdos de ensino; do ensino tradicional e seus efeitos; das concepções dos estudantes, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução; do campo de restrições onde será realizada a ação didática" (p. 21).

Nesse sentido, o autor destaca o fato de a proposta pedagógica da ementa da disciplina de História da Matemática – HM designar o ensino da HM sob um caráter retórico numa abordagem novelesca, que não evidencia um processo histórico-evolutivo contínuo das definições e relações Fibonaccianas. Além disso, é considerada a existência de hiatos históricos inerentes à SF, isto é, que ao longo da epistemologia da Matemática, a SF apresentou intervalos temporais em que não houve indicação de evolução em sua estrutura algébrica.

Essa abordagem didática da HM, na formação inicial de professores de Matemática, proporciona uma problemática que abrange a dificuldade em oportunizar o aprendizado de determinados resultados matemáticos não triviais derivados da HM e, assim, compreender que isso permite ampliar o repertório de HM. Com isso, Santos (2017, p. 17-18) assume a seguinte questão norteadora: "Como desenvolver um estudo sobre o processo de generalização da sequência de Fibonacci que promova situações didáticas envolvendo a identificação, descrição e exploração de propriedades do seu modelo generalizado e seus aspectos evolutivos?" e define os seguintes objetivos específicos:

1 Analisar o desenvolvimento matemático dos modelos de generalização da sequência de Fibonacci.
2 Analisar o desenvolvimento matemático da fórmula de Binet.
3 Descrever situações didáticas envolvendo o modelo de generalização da sequência de Fibonacci, desconsiderados pelos autores de livros de HM.
4 Aplicar uma metodologia de ensino na organização de atividades do modelo de generalização da sequência de Fibonacci voltadas à sala de aula, tendo em vista o estabelecimento ou formulação de definições.

Conforme Almouloud (2007), a segunda fase da ED, abrange a concepção e o planejamento de situações didáticas que permitam validar as hipóteses didáticas. Assim sendo, é feita uma previsão do que se espera obter em sala de aula. Neste caso, o autor priorizou a articulação entre duas variantes, a Matemática e a Didática, propondo uma transposição didática da SF através da proposição de questões (atividades). Essa fase foi desenvolvida com enfoque na TSD. O que dá sentido de complementaridade da ED com a TSD.

Posteriormente, foi desenvolvida a terceira fase da ED que trata da experimentação, a qual também é feita com enfoque na TSD. Almouloud (2007) e Pais (2002) descrevem que essa etapa se caracteriza como um momento de aplicação de toda esquematização didática organizada, ou seja, do desenvolvimento das sequências de ensino planejadas *a priori*. É relevante compreender que a TSD tem a situação didática como seu objeto fundamental, centrado na interação que ocorre, no *milieu*, entre docente, aluno e saber (Teixeira & Passos, 2013).

Sobre a TSD, D´Amore (2007), Picelli (2010), Teixeira & Passos (2013), Souza & Lima (2014) são os principais referenciais de Santos (2017). Esses autores discutem, em particular e respectivamente sobre: a epistemologia da Didática da Matemática, os processos de validação de conjecturas no estudo de Geometria Plana, a concepção e o desenvolvimento da TSD de Guy Brousseau, e o contrato didático efetivado na realização de uma sequência didática sobre progressão aritmética.

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i1.1767

A TSD é organizada em quatro fases consecutivas denominadas de ação, formulação, validação e institucionalização. Na situação de ação, o estudante toma a iniciativa de resolver o problema proposto pelo professor, através de tentativas imediatas, com o intuito de obter uma estratégia de resolução. Na etapa de formulação, ocorre a troca de informações entre o aluno e o meio estruturado, com uso de uma linguagem mais elaborada, porém, sem robustez do rigor formal (Picelli, 2010).

A dialética de validação objetiva o convencimento dos interlocutores quanto à veracidade ou refutação dos argumentos formulados. Nesta situação, a linguagem empregada na discussão deve ser formal, recorrendo a mecanismos de prova que satisfaçam ao rigor matemático. Na etapa final de institucionalização, o professor retoma a situação-problema, a fim de avaliar o que foi produzido pelos alunos, assim, cabe ao professor formalizar e generalizar o conhecimento construído durante a discussão da situação-problema (Teixeira & Passos, 2013).

Finalmente, tem-se a etapa de análise *a posteriori* e a validação, em que ocorre o tratamento dos dados coletados, vislumbrando verificar se os objetivos definidos foram, de fato, alcançados (Almouloud, 2007). Santos (2017) explica que após a comparação entre as hipóteses formuladas e a atividade prática, tem-se dados suficientes para refletir sobre a produtividade ou não da engenharia proposta, possibilitando a validação interna da engenharia, isto é, sem comparar as produções oriundas das situações didáticas dos alunos com pesquisas externas.

4. Modelo Matemático: Generalização e Extensão da SF

Como um recorte da etapa de análises *a priori* da ED, inicialmente, Santos (2017) fez uma revisão bibliográfica nos trabalhos que abordam a generalização e extensão da SF, nesse acervo são destacadas as seguintes temáticas: a história da Matemática (Stillwell, 1989), a descoberta nos números de Fibonacci (Alfred, 1965), a razão de ouro e sua relação com a SF (Dunlap, 1997), os números de Fibonacci e a Sequência de Lucas – SL (Hoggat, 1969), algumas aplicações algébricas inerentes à SF e SL (Koshy, 2011), os números de Catalan e de Fibonacci (Grimaldi, 2012).

O autor explica que algumas relações conceituais gerais pertinentes ao modelo de Fibonacci pertencem aos conteúdos de Ensino Médio e Ensino Superior, assim, é possível discuti-las em uma turma de graduação, especificamente, na formação inicial de professores de Matemática, de modo a designar uma ampliação dessas relações, lhes atribuindo um

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i1.1767

caráter Fibonacciano. Nesse sentido, destaca-se a "Formula de Binet e suas derivações, como modelo matemático de generalização e extensão da sequência de Fibonacci, a outros contextos matemáticos" (p.30). A Figura 1 apresenta uma esquematização da SF associada a outros conteúdos matemáticos.

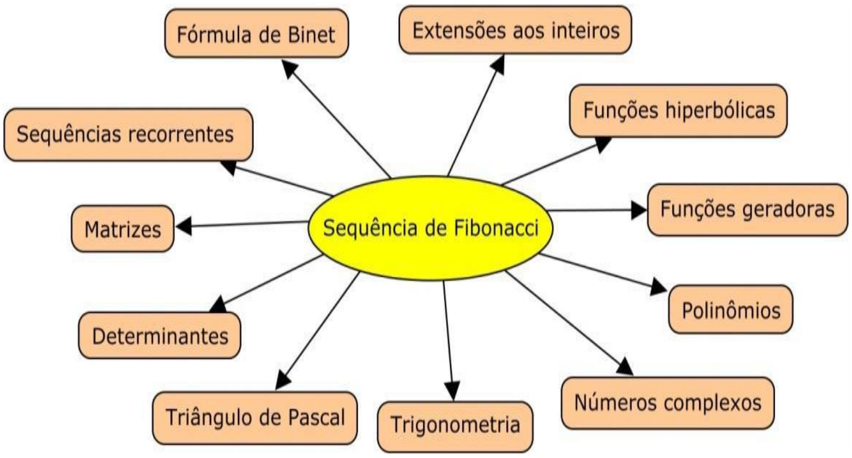


Figura 1. Esquematização – relação da SF a outros conteúdos matemáticos.
Fonte: Santos (2017, p. 31).

Na Figura 1, pode-se observar que a sequência Fibonacciana está vinculada ao conjunto dos números inteiros, dos números complexos e das funções hiperbólicas, possui funções geradoras, admite representações polinomiais, trigonométricas e matriciais, está associada a propriedades atinentes a outras sequências recorrentes e permite ser discutida através de determinantes e pelo triângulo de pascal e, também, ser determinada pela fórmula fechada de Binet.

Santos (2017, p. 32) descreve que o Modelo de Fibonacci tem sua gênese na Europa, sendo concebido por Leonardo de Pisa que adquiriu conhecimento sobre a Aritmética e Álgebra durante suas viagens pela Europa. Leonardo ficou conhecido como Fibonacci que, na abordagem denotativa, significa "filho de Bonaccio". Dentre os trabalhos elaborados por Fibonacci, destaca-se o problema que envolve a reprodução de coelhos imortais, tal que: "[...] um homem põe um casal de coelhos dentro de um cercado. Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, se a natureza desses coelhos é tal que a cada mês um casal gera um novo casal, que se torna produtivo a partir do segundo mês?".

Na resolução do problema, o autor explica que no primeiro mês, há somente um casal de coelhos jovens (não atingiram a maturidade). No segundo mês, ainda se tem apenas um casal (agora maduro) que pode se reproduzir. No terceiro mês, esse casal maduro reproduziu um casal de coelhos jovens, passando a existir dois casais: um jovem e um maduro. No quarto mês tem-se três casais, pois o casal maduro se reproduziu novamente, enquanto o casal jovem estava amadurecendo biologicamente. Considerando os coelhos como imortais e obedecendo o raciocínio de maturação e reprodução, a reprodução de casais de coelhos é um processo contínuo, ou seja, sem previsão para o término. Essa resolução gera uma sequência numérica que admite uma matematização denominada de SF.

Isso posto, na matematização da SF, assume-se n como unidade temporal (relativa ao mês), possibilitando a determinação das seguintes relações F_n (notação matemática):

$$
\begin{aligned}
&n=1 \Rightarrow F_1=1\\
&n=2 \Rightarrow F_2=1\\
&n=3 \Rightarrow F_3=2=F_2+F_1\\
&n=4 \Rightarrow F_4=3=F_3+F_2\\
&\quad\vdots\\
&n=n \Rightarrow F_n=F_{n-1}+F_{n-2}
\end{aligned}
$$

O resultado geral obtido é um dos modelos matemáticos iniciais apresentados. Santos (2017) explica que a SF recebe a seguinte notação: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podendo ser descrita pela recursividade $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$ com $n>2$ ou por $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$ com $n>1$. Além disso, a SF é definida por $\underset{n\mapsto x_n}{x_n:\mathbb{N}\to\mathbb{N}}$. No caso particular do conjunto dos Naturais, tem-se a seguinte sequência: $\{1, 1, 2, 3, 5,\ldots\}$. Baseado em Koshy (2011), o autor descreve que a SF admite ser determinada pela Fórmula de Binet, a qual foi descoberta pelo matemático Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786-1856) em 1843.

A Fórmula de Binet $f_n=\dfrac{\phi^n-\phi'^n}{\phi-\phi'}$ com $n\geq 1$ está intrinsecamente relacionada com as raízes (ϕ e ϕ') da equação quadrática $x^2-x-1=0$. Santos (2017) representa $f_n:=H_n$ e avalia o comportamento de $H_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$; considerando as raízes dessa equação como $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ e sabendo que $\alpha-\beta=\sqrt{5},\ \alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$; e compreende-se que H_n gera a seguinte sequência $\{H_1, H_2, H_3,\ldots\}$, ou seja, a SF. Veja que de fato:

$$
\begin{aligned}
&H_1=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}=1\\
&H_2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta=1\\
&H_3=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha-\beta)}=2\\
&\ \vdots\qquad\quad\vdots\qquad\quad\vdots
\end{aligned}
$$

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i1.1767

Dessa forma, Santos (2017) escreve, em função da Fórmula de Binet $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, que $f_{-n} = \dfrac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \dfrac{(-\beta)^n - (-\alpha)^n}{\alpha - \beta} = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)$. Assim sendo, tem-se que $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$. Considerando f_{-n} como uma notação para a SF com índices negativos, a seguir tem-se uma determinação da identidade $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$ através de sua verificação para $n = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Os resultados caracterizam os termos da SF como uma extensão do modelo para índices negativos.

$$
\begin{aligned}
&f_{-1} = f_1 - f_0 = 1 - 0 = 1 \;\Rightarrow\; f_{-1} = 1 = (-1)^{1+1} \cdot f_1\\
&f_{-2} = -1 = -f_2 \;\Rightarrow\; f_{-2} = -1 = (-1)^{2+1} \cdot f_2\\
&f_{-3} = 2 = f_3 \;\Rightarrow\; f_{-3} = 2 = (-1)^{3+1} \cdot f_3\\
&f_{-4} = -3 = -f_4 \;\Rightarrow\; f_{-4} = -3 = (-1)^{4+1} \cdot f_4\\
&\quad\vdots\\
&f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n.
\end{aligned}
$$

Ademais, a partir da função geradora $g'(x) = f_1x - f_2x^2 + f_3x^3 - \ldots + (-1)^{n+1}.f_nx^n + \ldots$, Santos (2017) faz a seguinte operação $g'(x) + x.g'(x) - x^2.g'(x)$ e determina $g'(x) = \dfrac{x}{1 + x - x^2}$. Logo, da divisão polinomial de $\dfrac{x}{1 + x - x^2}$, é possível observar que os primeiros coeficientes são os termos da SF, porém, aparecem alternadamente como positivos e negativos, ou seja: $\{+1, -1, +2, -3, +5, -8, +13, -21, \ldots\}$. O que designa uma representação da SF para o conjunto dos Inteiros. O autor faz outras generalizações e extensões da SF para outros modelos matemáticos. No entanto, a transposição didática enfatiza a Fórmula de Binet e sua expansão para índices inteiros.

5. Transposição Didática da SF

A transposição didática da SF foi realizada com suporte na TSD, através da elaboração de situações-problema. Sob uma visão holística da Didática da Matemática (vertente francesa), essa transposição foi feita mobilizando elementos de ordem epistemológica, didática e cognitiva. Na dimensão epistemológica, Santos (2017) focou sua investigação no processo histórico-evolutivo da estrutura algébrica das relações oriundas da generalização e extensão Fibonacciana. Todavia, não foi feita simultaneamente uma contextualização do surgimento das relações matemáticas com os fatos pertinentes ao período histórico em que essas relações estavam inseridas.

Na dimensão didática, o autor considerou o curso de Licenciatura em Matemática, particularmente, a disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática com ênfase na HM. Para isso, foi feita uma análise nos livros clássicos de HM (e usualmente adotados na disciplina de HM), onde foi verificado a presença da SF, porém, na sua forma algébrica inicial, em que a SF é apenas uma sequência numérica composta por números naturais, mas não apresentam sua extensão e forma generalizada. É nessa perspectiva de evolução algébrica que o autor trabalha, ou seja, nas relações matemáticas que não estão presentes nos livros clássicos de HM e, muitos menos, não são abordadas em sala de aula.

Os modelos generalizados da SF são transladados para um contexto didático, o qual nesta pesquisa é a sala de aula (disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática), tendo em vista que, *a priori*, eles pertencem ao campo da Matemática Pura. E, além disso, Ibid. (2017) assumiu a TSD como uma metodologia de ensino. Assim sendo, totalmente entrelaçado à dimensão didática, tem-se a esfera cognitiva, a qual engloba o momento de aprendizado. Quando os alunos são instigados a participar das situações didáticas, cujo enfoque pedagógico está na TSD, o autor pretendia compreender e respeitar as etapas cognitivas de construção do conhecimento matemático, em que pressupõe-se que o aluno partirá de um conhecimento prévio e será direcionado ao desenvolvimento de um raciocínio inferencial. Isso está associado à aprendizagem das definições e relações matemáticas do modelo generalizado de Fibonacci.

A partir do estudo, feito fora do contexto da sala de aula, das relações oriundas da generalização e extensão da SF, Santos (2017) planejou um conjunto de quatro situações didáticas que abordam o ensino e a aprendizagem de alguns dos modelos de generalização. Desse modo, caracterizando a fase de concepção e análise *a priori* da ED, foi feita uma predição de possíveis manifestações, mudanças comportamentais e resultados cognitivos, isto é, foi realizada uma avaliação cognitiva *a priori* dos estudantes.

A predição foi realizada com enfoque nas fases de ação, formulação, validação e institucionalização da TSD. Vale está ciente de que as três fases iniciais da TSD tiveram o aluno como principal protagonista e a última etapa de institucionalização foi feita pelo docente. Dessa forma, Ibid. (2017) esperava que na fase de ação, os alunos usassem seus conhecimentos prévios, podendo estes serem de natureza intuitiva ou teórica, ou seja, era esperado que os estudantes recorressem a definições e/ou conceitos matemáticos atinentes à SF.

No momento de formulação, o autor esperava que os estudantes formulassem conjecturas ou hipóteses tendenciadas para a generalização e extensão da SF. E, na dialética da validação, vislumbrava que os alunos usassem métodos de demonstração matemática como, por exemplo, a indução matemática, a fim de determinar alguma forma generalizada. De modo geral, ao término da realização das quatro atividades, Santos (2017) esperava oportunizar para o aluno a compreensão de que essa atividade de extensão Fibonacciana, caracteriza um processo histórico-evolutivo do modelo de Fibonacci.

Na perspectiva de institucionalização da TSD, Ibid. (2017) queria formalizar os conceitos e as relações do modelo generalizado de Fibonacci, abordado nas situações didáticas, através da proposição de atividades sobre a generalização e extensão da Fórmula de Binet. Ainda como uma análise *a priori* da ED, a seguir tem-se uma descrição das hipóteses didáticas constituídas para cada atividade, as quais apresentavam as temáticas expostas no Quadro 1.

Atividade 1 – Sequência recorrente que modeliza o problema dos coelhos imortais e da sequência estendida de Fibonacci aos inteiros; Atividade 2 – A fórmula de Binet como modelo de generalização da SF; Atividade 3 – Fórmula de Binet estendida a índices inteiros; Atividade 4 – Funções geradoras e a sequência de Fibonacci.

Quadro 1. Temáticas de cada atividade discutida na situação didática.
Fonte: Santos (2017).

Na atividade 1, foi assumida como hipótese que os alunos conseguiriam estabelecer uma notação recorrente a partir da interpretação do problema da reprodução dos coelhos, além de estenderem a sequência para índices inteiros. Na atividade 2, a hipótese é que os alunos deveriam caracterizar a Fórmula de Binet, como uma fórmula fechada para a determinação dos termos da SF, não sendo mais recursiva.

Na atividade 3, o autor coloca a hipótese associada à expectativa de que os estudantes identificariam a expressão $f_{-n} = (-1)^{n+1} . f_n$ como uma fórmula variante de Binet representando, assim, uma extensão da SF para índices inteiros. Nessa atividade, também era esperado que os alunos recorressem ao modelo de Binet, constituído na atividade 2, como elemento de prova/demonstração das propriedades da SF. Por fim, na atividade 4, tem-se a seguinte hipótese: os alunos compreenderiam a caracterização da SF com base em outros contextos matemáticos, que não seja apenas, a modelização do problema da reprodução dos coelhos. A seguir, tem-se uma discussão referente à situação didática realizada.

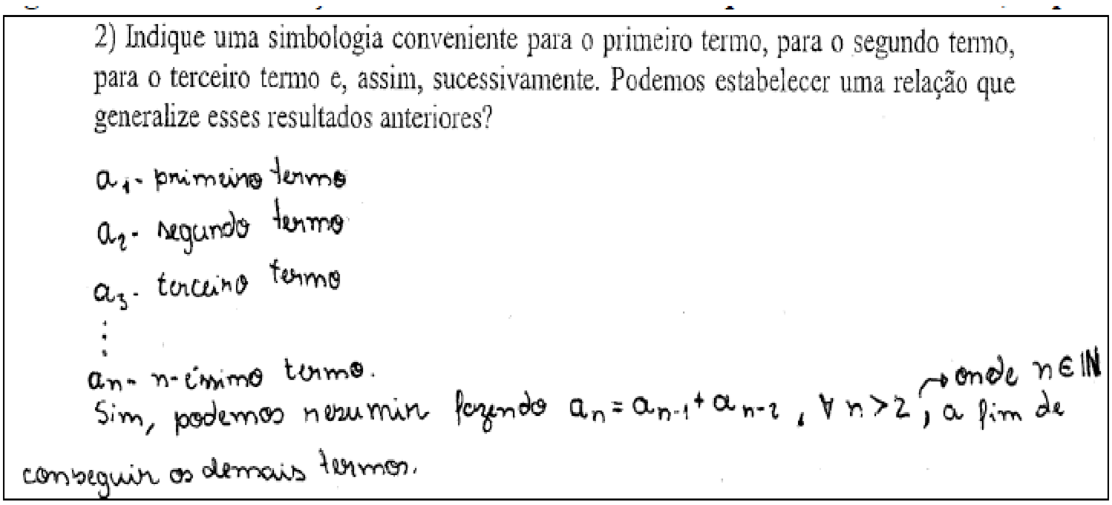
Research, Society and Development, v. 9, n.1, e165911767, 2020
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i1.1767

6. A Vivência Didática: Experimentação, Coleta e Discussão dos Dados

Nesta seção, serão discutidos aspectos relativos à vivência didática e aos dados coletados nesta experimentação. Isso caracteriza as duas etapas finais da ED: experimentação e as análises *a posteriori* e validação. A situação didática ocorreu no IFCE em 2016, na disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática correspondente ao 5º semestre do curso de Licenciatura em Matemática. A pesquisa teve como público alvo (participantes da pesquisa), 07 alunos regularmente matriculados.

Durante a situação didática, foram utilizados alguns instrumentais de coleta de dados, tais como entrevistas semiestruturadas e registros fotográficos das produções escritas dos alunos, além disso, foram observadas as discussões feitas durante a resolução das atividades. A experimentação foi realizada em 4 aulas, sendo cada uma de 90 minutos. Geralmente, os alunos eram organizados em grupos. Vale ressaltar que Santos (2017) assumiu a TSD não apenas como uma teoria de ensino, mas também como uma metodologia de ensino.

Além do mais, a primeira atividade aborda sobre a sequência recorrente que modeliza o problema dos coelhos imortais e da extensão da SF para os inteiros. Durante a resolução dessa atividade, os alunos apresentaram na fase de validação da TSD, uma interpretação para o problema dos coelhos, a partir de seus conhecimentos prévios. Essa "releitura" matematizada do problema pode ser compreendida como uma sequência generalizada de Fibonacci de caráter recursivo ou implícito (ver Figura 2).

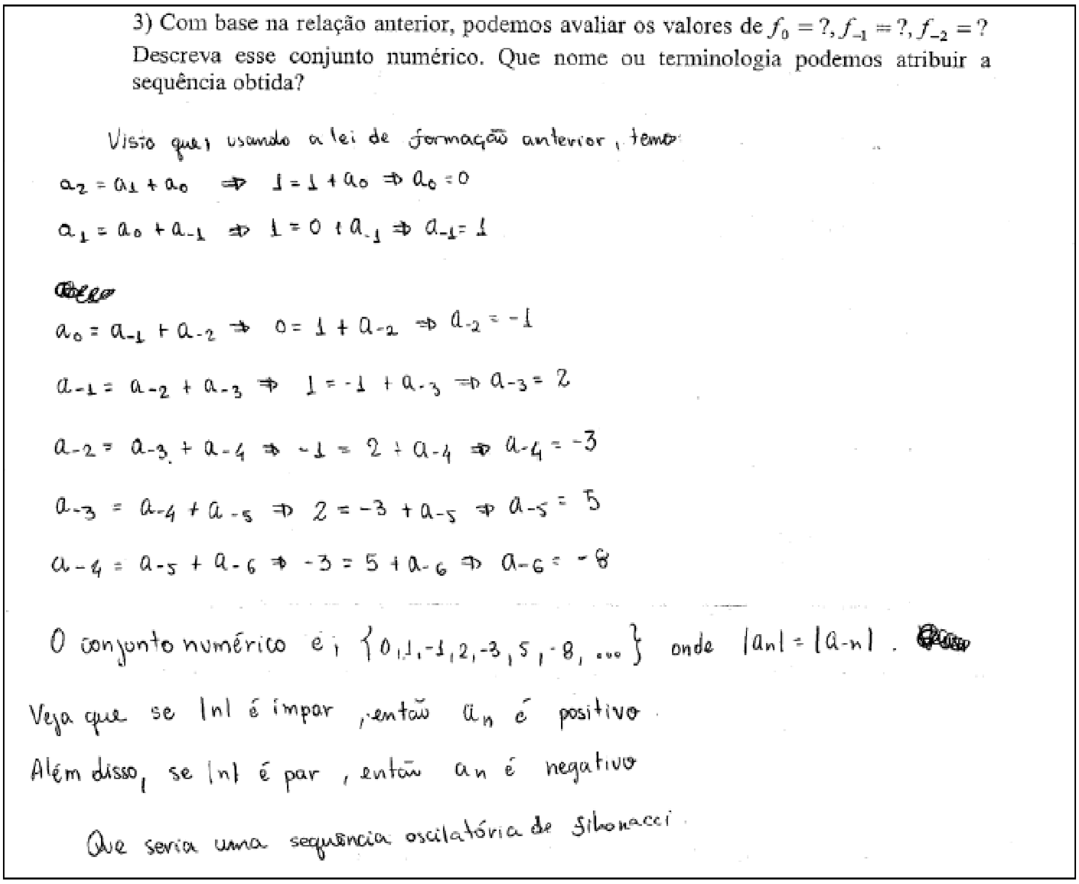

2) Indique uma simbologia conveniente para o primeiro termo, para o segundo termo, para o terceiro termo e, assim, sucessivamente. Podemos estabelecer uma relação que generalize esses resultados anteriores?

a_1 - primeiro termo
a_2 - segundo termo
a_3 - terceiro termo
⋮
a_n - n-ésimo termo.
Sim, podemos resumir fazendo $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $\forall n > 2$, onde $n \in \mathbb{N}$, a fim de conseguir os demais termos.

Figura 2. Determinação da Lei de recorrência da SF.
Fonte: Santos (2017, p.103).

Na Figura 2, há o registro no qual se sugere aos estudantes que indiquem uma simbologia que represente os termos da SF, assim, pode-se ver uma determinação da lei de recorrência da SF, que foi obtida a partir da representação de cada termo através de $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, perspectivando a forma generalizada: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall\ n > 2,\ n \in \mathbb{N}$. Essa Figura contém a resolução feita por um aluno.

Ainda na atividade 1, os alunos foram orientados a usar a lei de recorrência encontrada (Figura 2), a fim de obter f_0, f_{-1} e f_{-2}, vislumbrando a extensão de SF para índices inteiros. Inicialmente, a turma expressou certa resistência em tentar fazer essa extensão pois, a concepção dos alunos estava presa a uma representação da SF apenas com índices naturais. Mas, houve a discussão e eles conseguiram realizar a extensão para os inteiros (ver Figura 3).


3) Com base na relação anterior, podemos avaliar os valores de $f_0 = ?, f_{-1} = ?, f_{-2} = ?$ Descreva esse conjunto numérico. Que nome ou terminologia podemos atribuir a sequência obtida?

Visto que, usando a lei de formação anterior, temos:

$a_2 = a_1 + a_0 \Rightarrow 1 = 1 + a_0 \Rightarrow a_0 = 0$

$a_1 = a_0 + a_{-1} \Rightarrow 1 = 0 + a_{-1} \Rightarrow a_{-1} = 1$

$a_0 = a_{-1} + a_{-2} \Rightarrow 0 = 1 + a_{-2} \Rightarrow a_{-2} = -1$

$a_{-1} = a_{-2} + a_{-3} \Rightarrow 1 = -1 + a_{-3} \Rightarrow a_{-3} = 2$

$a_{-2} = a_{-3} + a_{-4} \Rightarrow -1 = 2 + a_{-4} \Rightarrow a_{-4} = -3$

$a_{-3} = a_{-4} + a_{-5} \Rightarrow 2 = -3 + a_{-5} \Rightarrow a_{-5} = 5$

$a_{-4} = a_{-5} + a_{-6} \Rightarrow -3 = 5 + a_{-6} \Rightarrow a_{-6} = -8$

O conjunto numérico é: $\{0, 1, -1, 2, -3, 5, -8, ...\}$ onde $|a_n| = |a_{-n}|$.

Veja que se $|n|$ é ímpar, então a_n é positivo.

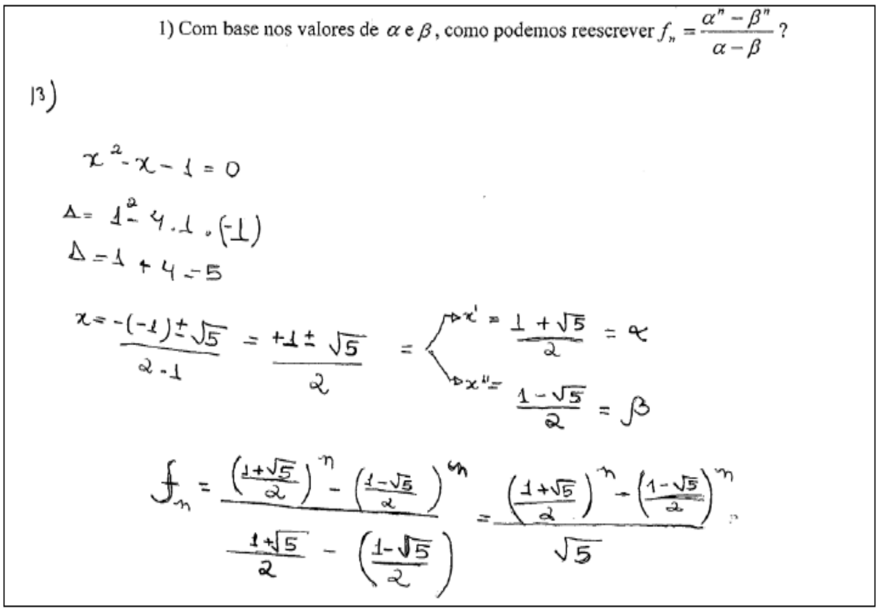
Além disso, se $|n|$ é par, então a_n é negativo.

Que seria uma sequência oscilatória de Fibonacci.

Figura 3. Extensão da SF para índices inteiros.
Fonte: Santos (2017, p.104).

Na Figura 3, tem-se as anotações de um aluno, que descreve a seguinte sequência: $\{0, +1, -1, +2, -3, +5, -8, ...\}$ e faz duas conjecturas: (*i*) se $|n|$ é ímpar, então, a_n é positivo; (*ii*) se $|n|$ é par, então, a_n é negativo. Esse estudante atribuiu uma terminologia para a sequência gerada a partir da relação recorrente, chamando-a de "sequência oscilatória de

Fibonacci". Em seguida, na Figura 4, pode-se obter também uma descrição da SF aplicando a Fórmula de Binet.


1) Com base nos valores de α e β, como podemos reescrever $f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$?

13)

$x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4.1.(-1)$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2.1} = \frac{+1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha \\ x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \beta \end{cases}$

$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

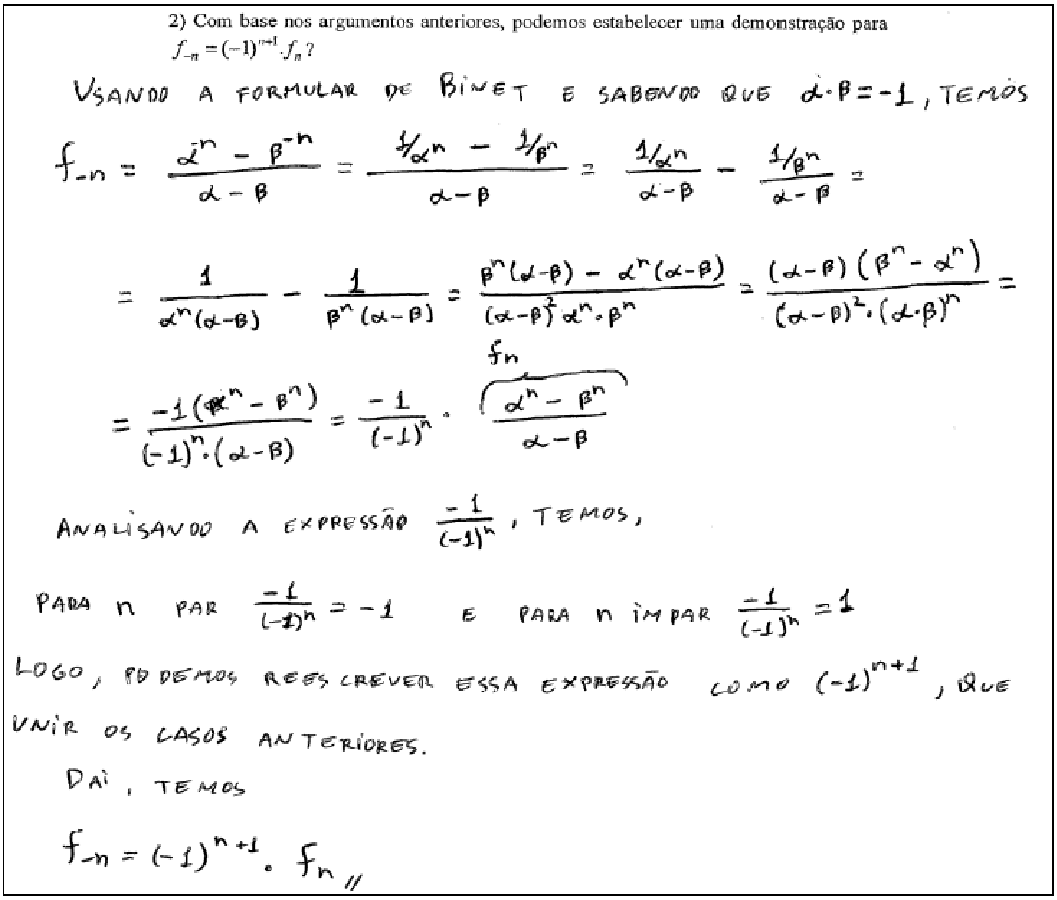
Figura 4. Determinação da Fórmula de Binet.
Fonte: Santos (2017, p.106).

Na atividade 2, os estudantes conseguiram determinar a Fórmula de Binet, assumindo como pressupostos as raízes da equação quadrática: $x^2 - x - 1 = 0$ e o modelo de generalização da SF que foi sugerido (ver Figura 4). Em seguida, eles conseguiram calcular os termos da SF utilizando a Fórmula de Binet. Nessa Figura, o aluno obteve as raízes $x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, as quais são representadas, respectivamente, por α e β. Com isso, foi determinada a seguinte variante da Fórmula de Binet:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

A atividade 3 oportunizou ampliar a discussão da Fórmula de Binet para índices inteiros. De início, os alunos avaliaram o comportamento da relação $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$, atribuindo-lhes valores numéricos para *n*. Assim sendo, alguns alunos obtiveram uma sequência numérica e a nomearam de "sequência de Fibonacci para índices inteiros" e/ou "sequência variante de Fibonacci" (ver Figura 5).

Research, Society and Development, v. 9, n.1, e165911767, 2020
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i1.1767



2) Com base nos argumentos anteriores, podemos estabelecer uma demonstração para $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$?

USANDO A FORMULAR DE BINET E SABENDO QUE $\alpha \cdot \beta = -1$, TEMOS

$$f_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{1/\alpha^n - 1/\beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1/\alpha^n}{\alpha - \beta} - \frac{1/\beta^n}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^n(\alpha-\beta)} - \frac{1}{\beta^n(\alpha-\beta)} = \frac{\beta^n(\alpha-\beta) - \alpha^n(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2 \alpha^n \cdot \beta^n} = \frac{(\alpha-\beta)(\beta^n - \alpha^n)}{(\alpha-\beta)^2 \cdot (\alpha \cdot \beta)^n} =$$

$$= \frac{-1(\alpha^n - \beta^n)}{(-1)^n \cdot (\alpha - \beta)} = \frac{-1}{(-1)^n} \cdot \overbrace{\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}}^{f_n}$$

ANALISANDO A EXPRESSÃO $\frac{-1}{(-1)^n}$, TEMOS,

PARA n PAR $\frac{-1}{(-1)^n} = -1$ E PARA n ÍMPAR $\frac{-1}{(-1)^n} = 1$

LOGO, PODEMOS REESCREVER ESSA EXPRESSÃO COMO $(-1)^{n+1}$, QUE UNIR OS CASOS ANTERIORES.

DAÍ, TEMOS

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot f_n \,//$$

Figura 5. Fórmula de Binet para índices inteiros.
Fonte: Santos (2017, p.111).

Ademais, a Figura 5 ilustra o momento em que um dos estudantes reescreveu a Fórmula de Binet, considerando o índice negativo $-n$, tal que se escreveu a forma $f_{-n} = \dfrac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta}$, e aplicou algumas propriedades de potenciação para determinar a expressão $f_{-n} = (-1)^{n+1}.f_n$, onde $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$.

A atividade 4 direciona uma discussão sobre funções geradoras. O que ocorreu por meio da aplicação do método da divisão direta entre polinômios. Santos (2017) destaca que alguns alunos demoraram a discutir sobre a questão, pois achavam impossível realizar uma divisão entre dois polinômios, de modo que houvesse no numerador um polinômio de grau menor do que o do apresentado no denominador. Contudo, os estudantes realizaram as divisões e no final do processo, eles observaram que o resultado da divisão de $\dfrac{x}{1+x-x^2}$, era a sequência de Fibonacci estendida para índices inteiros (ver Figura 6).

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i1.1767

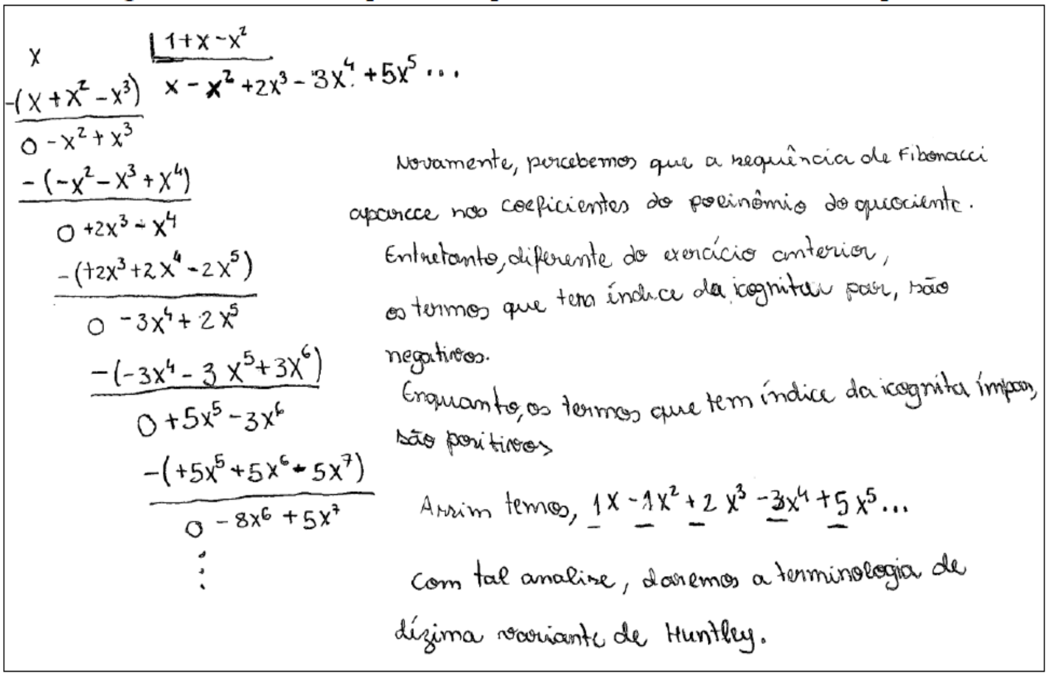


Figura 6. Discussão da SF através da divisão polinomial (método da divisão direta).
Fonte: Santos (2017, p.116).

Observe na Figura 6, que os termos da SF são evidenciados nos coeficientes do polinômio do quociente. Ainda nessa imagem, um aluno descreve, que diferentemente da atividade anterior, os termos que apresentam índice de incógnita par, são negativos. E, por outro lado, os termos que possuem índice de incógnita ímpar, são positivos. Desse modo, destacou: $\left(1x - 1x^2 + 2x^3 - 3x^4 + 5x^5 \ldots\right)$, a que foi atribuída a terminologia de “dízima variante de Huntley”.

Considerando a validação da pesquisa, essa foi feita de modo interno. Isso quer dizer que não houve comparação das produções dos alunos com outras produções externas à situação didática desenvolvida nesta pesquisa. No sentido restrito à sala aula, o pesquisador observou que de fato o professor-pesquisador conseguiu desenvolver em sala de aula situações didáticas inerentes à generalização e extensão da Fórmula de Binet para o modelo de Fibonacci.

Numa abordagem geral da pesquisa, finalizando o seu processo de validação, Santos (2017) verificou se os seus objetivos de investigação foram alcançados e, assim, constatou que o modelo de Fibonacci admite uma extensão para outros modelos matemáticos, de maneira que, nesse desenvolvimento matemático, destacou o modelo Fibonacciano generalizado pela fórmula de Binet. Em seguida, esse conteúdo foi estudado no contexto didático-cognitivo (no Ensino Superior) sob o viés de uma teoria de ensino (TSD) através da discussão de atividades (ver Quadro 1). Tendo em vista que os objetivos foram atingidos, conseguiu-se validar esta pesquisa.

7. Considerações Finais

Esta resenha tem em seu escopo, a intenção de sintetizar a dissertação de Santos (2017), fazendo uma reflexão da metodologia de pesquisa empregada pelo autor e de como ele construiu a ED articulando-a com a teoria de ensino (TSD) juntamente com o modelo matemático abordado. Percebe-se que o autor realizou uma transposição didática, que somente foi possível com a análise de aspectos epistemológicos, didáticos e cognitivos inerentes à Didática da Matemática. Tendo em vista que o modelo de Fibonacci generalizado pela Fórmula de Binet tem sua gênese na literatura da Matemática Pura, essa translação didática foi necessária.

Quanto à perspectiva epistemológica, percebeu-se que o autor buscou trabalhar a HM, porém, Santos (2017) enfatizou a discussão algébrica das relações que proporcionaram a generalização e extensão do modelo de Fibonacci, de modo que os elementos de contextualização ficaram implícitos ou até mesmo ausentes no texto dissertativo. O que caracterizou uma epistemologia mais matemática do que de perspectiva histórica.

No âmbito didático-cognitivo, o autor trabalhou a sequência generalizada de Fibonacci na disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática. Dessa forma, ficou subentendido que a escolha dessa disciplina, justifica-se pelo fato de o autor compreender e assumir a TSD como uma metodologia de ensino e, também, propor e realizar uma vivência didática, em que o ensino de HM é desenvolvido numa abordagem epistemológica da estrutura algébrica dos conceitos matemáticos e não apenas do enredo do período histórico e/ou da biografia dos matemáticos.

Inicialmente na França, o percurso metodológico fornecido pela ED era aplicado apenas no Ensino Médio, mas nessa dissertação ele foi aplicado no Ensino Superior no curso de Licenciatura em Matemática, em que os professores em formação inicial foram considerados como alunos em processo de aprendizagem. Todavia, a situação didática realizada contribuiu, de modo implícito, para a formação docente pois oportunizou o desenvolvimento de uma concepção epistemológica sobre o ensino de HM. Além do mais, diante do processo histórico-evolutivo que envolve o modelo de Fibonacci, pode-se concluir que o surgimento de novas definições e propriedades matemáticas oriundas da generalização da SF contribuem para ampliar o repertório da HM.

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i1.1767

Por fim, compreende-se a significativa relevância, para a Didática da Matemática, do trabalho de Santos (2017), o qual serviu de fundamentação teórica e metodológica para a pesquisa feita por Oliveira (2018) sobre o modelo de complexificação da sequência generalizada de Fibonacci. É interessante saber que, no PGECM, é desenvolvida uma intensa atividade de investigação sobre a transposição didática e generalização matemática de sequências numéricas, com ênfase no seu processo histórico-evolutivo.

Referências

Alfred, B. U. (1965) *An introduction to Fibonacci Discovery.* Santa Clara: The Fibonacci Association, 1965. Disponível em:< http://www.fq.math.ca/Books/Complete/discovery.pdf> Acesso em: 25.out. 2017.

Almouloud, S.A. (2007) *Fundamentos da Didática da Matemática*. 3.ed. São Paulo: Editora UFPR.

Artigue, M. (1995) Ingenieria Didática. In: Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. Gomez, P. *Ingeniéria didática em Educacion Matemática.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, cap.4, p.33-61.

Cervo, A. L.; Bervian, P. A.; Silva, R. (2007) *Metodologia Cientifica.* 6ª ed. São Paulo: Pearson.

D’amore, B. (2007) Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino. *Bolema*, Rio Claro, SP, v. 20, n. 28, p.179-205. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1537/131>. Acesso em: 07 jul. 2018.

Dunlap, R. A. (1997) *The gold ratio and Fibonacci Numbers*. Singapore: Word Scientific.

Grimaldi, R. P. (2012) *Fibonacci and Catalan Numbers:* an introduction. New Jersey: Jonh Wiley & Sons.

Hoggat, Jr. V. (1969) *Fibonacci and Lucas numbers*. Santa Clara: The Fibonacci Association. Disponível em: <http://www.fq.math.ca/Books/Complete/fibonacci-lucas.pdf> Acesso em: 28.out. 2017.

Koshy, T. (2011) *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. New York: John Wiley and Sons.

Oliveira, R. R. (2018) *Engenharia Didática sobre o Modelo de Complexificação da Sequência Generalizada de Fibonacci: Relações Recorrentes n-Dimensionais e Representações Polinomiais e Matriciais.* Dissertação de Mestrado Acadêmico – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE. Fortaleza: IFCE. Disponível em: <http://pgecm.fortaleza.ifce.edu.br/apresentacao-do-programa/> Acesso em: 20.jan.2019.

Pais, L. C. (2002) *Didática da Matemática:* uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autentica.

Pereira, A.S. et al. (2018). *Metodologia da pesquisa científica*. [*e-book*]. Santa Maria. Ed. UAB/NTE/UFSM. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/15824/Lic_Computacao_Metodologia-Pesquisa-Cientifica.pdf?sequence=1. Acesso em: 06 out. 2019.

Piccelli, P. H. (2010) *Processos de validação de conjecturas em geometria plana.* 105f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS.

Santos, A. A. (2017) *Engenharia Didática sobre o estudo e ensino da Fórmula de Binet como modelo de generalização e extensão da sequência de Fibonacci.* Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE. Fortaleza: IFCE, 162p. disponível em: <http://pgecm.fortaleza.ifce.edu.br/wp-content/uploads/2016/04/disserta%c3%a7%c3%a3o-finalizada-com-a-catalogr%c3%a1fica-final.pdf> Acesso em: 15.jun.2018.

Souza, C. M. P.; Lima, A.P.A. B. (2014) O contrato didático a partir da aplicação de uma sequencia didática para o ensino da progressão aritmética. *Zetetiké*, Campinas, SP, v. 22, n. 42, p.31-61, jun./dez. Disponível em: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/4360> Acesso em: 02.abr. 2017.

Stillwell, J. (1989) *Mathematics and its History*. New York: Springer Verlag.

Teixeira, P. J. M.; Passos, C. C. M. (2013) Um pouco da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. *Zetetiké*, Campinas, SP, v. 21, n. 39, p.155-168, jan./jun. 2013. Disponível em: <https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/4327/5110 > Acesso em: 02 ago. 2017.

Porcentagem de contribuição de cada autor no manuscrito

Rannyelly Rodrigues de Oliveira – 42%

Maria Helena de Andrade – 38%

Francisco Régis Vieira Alves – 20%