Research, Society and Development, v. 11, n. 3, e55611326955, 2022
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v11i3.26955

A geometria de René Descartes por meio de unidade básica de problematização

The geometry of René Descartes through a basic unit of problematization

La geometría de René Descartes a través de una unidad básica de problematización

Recebido: 14/02/2022 | Revisado: 20/02/2022 | Aceito: 25/02/2022 | Publicado: 07/03/2022

Álvaro Luan Moraes Medeiros
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4854-4993
Universidade Federal do Pará, Brasil
E-mail: alvaro.medeiros@icen.ufpa.br
Iran Abreu Mendes
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7910-1602
Universidade Federal do Pará, Brasil
E-mail: iamendes1@gmail.com

Resumo
Uma Unidade Básica de Problematização (UBP) constitui-se principalmente em um *flash discursivo memorialístico* que descreve práticas socioculturais. Com seu uso, o professor pode proporcionar diversos modos de problematização indisciplinar e conduzir os estudantes à prática de ações e reflexões que podem gerar novos conhecimentos. Nesse artigo fazemos uma revisão dos fundamentos teóricos relacionados à UBP, destacando suas principais características e sua liberdade estrutural, seguido de uma revisão dos estudos e produções acadêmicas que se fundamentam na concepção de UBP. Igualmente, propomos orientações didáticas que possam auxiliar os docentes no planejamento e execução de UBPs como possibilidade concretas de abordagem conceitual dos conteúdos escolares que emergem do livro *A Geometria*, que faz parte do apêndice do *Discurso do Método*, de René Descartes. Ao final apresentamos algumas reflexões que podem auxiliar os professores na utilização dessa proposta metodológica.
Palavras-chave: Unidade básica de problematização; Práticas socioculturais; História da matemática; René Descartes.

Abstract
A Basic Problematization Unit (UBP) is mainly a *discursive memory flash* that describes sociocultural practices. With its use, the teacher can provide different modes of interdisciplinary problematization and lead students to the practice of actions and reflections that can generate new knowledge. In this article, we review the theoretical foundations related to the UBP, highlighting its main characteristics and its structural freedom, followed by a review of the studies and academic productions based on the conception of the UBP. Likewise, we propose didactic guidelines that can help teachers in the planning and execution of UBPs as a concrete possibility for a conceptual approach to school contents that emerge from the book *Geometry*, which is part of the appendix of the *Discourse on the Method*, by René Descartes. At the end, we present some reflections that can help teachers in the use of this methodological proposal.
Keywords: Basic problematization unit; Sociocultural practices; History of mathematics; René Descartes.

Resumen
Una Unidad Básica de Problematización (UBP) es principalmente un *destello de memoria discursiva* que describe prácticas socioculturales. Con su uso, el docente puede brindar diferentes modos de problematización interdisciplinaria y conducir a los estudiantes a la práctica de acciones y reflexiones que pueden generar nuevos conocimientos. En este artículo revisamos los fundamentos teóricos relacionados con la UBP, destacando sus principales características y su libertad estructural, seguido de una revisión de los estudios y producciones académicas que se sustentan en la concepción de la UBP. Asimismo, proponemos lineamientos didácticos que puedan ayudar a los docentes en la planificación y ejecución de las UBP como posibilidad concreta de un acercamiento conceptual a los contenidos escolares que emergen del libro *Geometria*, que forma parte del apéndice del *Discurso del Método*, de René Descartes. Al final, presentamos algunas reflexiones que pueden ayudar a los docentes en el uso de esta propuesta metodológica.
Palabras clave: Unidad básica de problematización; Prácticas socioculturales; Historia de las matemáticas; René Descartes.

1. Apresentação

Neste artigo fazemos uma discussão a respeito dos princípios teóricos e metodológicos que propugnam o exercício de problematização no ensino, com vistas a estabelecer possibilidades de abordagens de temas escolares relativos à Matemática, tomando como base os conteúdos emergentes do livro A Geometria, presente no apêndice do Discurso do Método, de René

Descartes. Nos fundamentamos nas proposições teóricas defendidas por Miguel e Mendes (2010) que argumentam favoravelmente acerca da elaboração e uso de Unidades Básicas de Problematização (UBP), discutindo sobre os modos de como essa forma de mobilizar práticas socioculturais para a aprendizagem matemática – na formação de professores e na Educação Básica – podem propiciar movimentos de apropriação de conhecimentos historicamente produzidos pela sociedade e que cotidianamente passam por processo de reelaboração.

Nessa perspectiva, organizamos este artigo em seções que abordam os seguintes aspectos: a) uma revisão dos fundamentos teóricos advogados por Miguel e Mendes (2010, 2021) acerca do tema; b) uma revisão dos estudos e produções acadêmicas fundamentadas nos princípios defendidos por Miguel e Mendes (2010, 2021) e os novos resultados alcançados nas pesquisas, com desdobramentos para o ensino de matemática sob uma ótica da integração de saberes e práticas socioculturais históricas e; c) sugestões concretas de possíveis abordagens conceituais e didáticas de conteúdos escolares a serem exploradas com base no livro A Geometria, tomando como referências as diretrizes norteadoras de elaboração e uso de UBP no ensino de Matemática.

2. Apontamentos Metodológicos

Nossa pesquisa é qualitativa, pois não procuramos a enumeração e/ou medição dos eventos estudados, tampouco empregamos instrumentos estatísticos na análise, mas sim buscamos obter dados descritivos a respeito de pessoas, lugares e processos interativos mantendo contato direto com a situação estudada com a finalidade de compreender os fenômenos (Godoy, 1995). Assumimos também um caráter bibliográfico e documental, visto que utilizamos materiais já constituídos (Gil, 2008).

Reforçamos essa abordagem nos baseando em apontamentos mencionados por Flick (2009) sobre os estudos de natureza qualitativa. Para o referido autor, esse tipo de pesquisa pretende abordar o mundo externo, analisando experiências individuais ou coletivas, examinando interações e comunicações, e/ou investigando documentos para entender, descrever e explicar fenômenos menos sociais.

As revisões apresentadas nas seções seguintes têm fundamentos em Flick (2012), pois objetivam apresentar quais são as bases conceituais das Unidades Básicas de Problematização; o que já foi discutido, os novos apontamentos e as orientações quanto às UBPs. Além disso, possibilitam a identificação de questões que ainda não foram estudadas e das que continuam em aberto.

3. Sobre os Fundamentos Teóricos de uma UBP

A partir da segunda metade do século XX muitas discussões sobre o ensino de Matemática foram se ampliando até as primeiras décadas do século XXI. Como resultado de estudos e pesquisas desenvolvidas no campo da Educação Matemática, muitas reflexões apresentadas pelos pesquisadores têm sugerido que as práticas a serem implementadas em sala de aula devem ser concretizadas por meio da transversalidade do conhecimento. Para Mendes e Silva (2018), o conceito de transversalidade constitui-se, então, em uma ação reflexiva na qual interferem o contexto, a trajetória pessoal, os intercâmbios socioculturais, os diálogos entre os diversos significados das informações produzidas e utilizadas em cada contexto social, bem como a importância dessas informações em todos os contextos ligados aos possíveis temas tomados sob a luz da transversalidade.

Justifica-se tal assertiva por se considerar a Matemática como um complexo cognitivo no qual se evidenciam manifestações do pensamento humano acerca da investigação, compreensão e explicação da realidade. A esse respeito Mendes e Silva (2018) asseveram que conhecer é um ato pessoal no qual a atividade humana se faz essencial, na medida em que necessitamos interagir com os objetos do nosso entorno e recombinarmos seus elementos característicos na tentativa de concretizarmos criações do nosso campo imaginativo. É no processo de reinvenção permanente que envolve ação-reflexão-ação, que geramos conhecimento.

> "Uma única codificação para transmitir de forma lógica e sistemática o conhecimento aos estudantes isola um a um dos pontos que constituem o conhecimento como rede, causando fragmentações na forma de diferentes áreas de conhecimento, impossibilitando as conexões entre os ramos do conhecimento, criando as disciplinas e isolando as respostas que vão sendo obtidas. Em contraste a esse princípio fragmentador, redutor e isolante, sugerem-se variados métodos de ensino que objetivam promover a construção desses saberes pelos próprios alunos a partir de um processo contextual e globalizante, que dê significado singular e plural às ideias construídas" (MENDES; SILVA, 2018, p.41).

Conforme Miguel e Mendes (2010, 2021), a UBP constitui-se principalmente em um *flash discursivo memorialístico* que descreve práticas socioculturais, que de fato foram realizadas social e historicamente para que a sociedade pudesse compreender e explicar situações, no sentido de responder a uma necessidade manifestada em uma ou mais comunidades durante seu processo de desenvolvimento, como uma atividade ocorrida em diferentes locais e momentos da história humana. Essas Unidades Básicas podem proporcionar diversos modos de problematização indisciplinar (isto é, independentemente de pertencer a qualquer disciplina, ou seja, por se tratar de uma prática sociocultural) em busca de respostas no âmbito da aprendizagem escolar, possibilitando que o professor conduza os estudantes à prática de ações e reflexões que possam gerar novos conhecimentos. Assim, uma UBP é elaborada como uma prática indisciplinar estruturada na forma de um *flash discursivo memorialístico* que denota uma visão acerca da prática tomada como acionadora da problematização metodológica pretendida pelo professor para ser desenvolvida em sala de aula.

Estes autores reforçam que a intenção da produção de um conjunto de UBPs é a mobilização das práticas escolares da cultura matemática por meio da problematização. Essas práticas levam em consideração os elementos tidos, muitas vezes, como supérfluos ou irrelevantes (contextos, historicidade, informalidade e simplicidade) na cultura matemática, para contrastá-los com maneiras que a cultura matemática poderia ter sido, ou foi mobilizada em outras atividades humanas. Isso possibilita a alteração e utilização de uma Unidade de Problematização com outros fins, especialmente na Educação Básica devido a sua natureza aberta e indisciplinar que permite atingir níveis inesperados de profundidade, sofisticação, complexidade, sutileza e originalidade.

Para Miguel e Mendes (2010, 2021), a primeira fase da mobilização de histórias para elaboração de uma UBP, o professor deve buscar identificar diferentes usos e contextos das práticas escolares da matemática e em seguida, recordar de suas vivências escolares mobilizando objetos específicos da cultura matemática – podendo considerar objetos matemáticos estudados e/ou trabalhados nas práticas de ensino, metodologias de ensino, materiais didáticos, normas de comportamentos, práticas avaliativas, etc. – e produzir uma primeira versão de um conjunto analítico – com categoria, descrição e interpretação – de textos que mais tarde serão usados pelos estudantes como *flash discursivo memorialístico*.

Na segunda etapa, o docente deve focar em práticas escolares específicas que estão relacionadas com os objetos matemáticos que serão abordados, elaborando questões norteadoras de natureza pedagógica, histórica, filosófica, epistemológica, lógica, sociológica, etc., considerando sempre as suas expectativas e interesses didáticos e pedagógicos, e os imprevistos (surpresas, diferentes perguntas e respostas dos educandos, falta de materiais, entre outros) que podem ocorrer durante as aulas.

Na terceira etapa, que pode ser realizada com a precedente, pesquisas documentais orientadas pelas questões estruturadas anteriormente devem ocorrer em programas oficiais e materiais didáticos com vistas a estabelecer novos jogos discursivos de memórias alternativas de práticas escolares, que potencialmente são mobilizadoras da cultura matemática.

Em seus estudos, Miguel e Mendes (2010; 2021) também apresentam orientações de uso das UBPs, baseados em suas experiências na mobilização de histórias, para a elaboração de uma UBP, vivenciados em turmas de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). É com base nessas orientações que pretendemos apresentar nossos modos de problematizar os temas identificados em *A Geometria*, de Descartes, com uma aproximação às UBPs, de modo que as mesmas possam ser usadas pelos professores da Educação Básica.

A seguir apresentamos três exemplos de UBPs elaboradas por Miguel (2010; 2021) e algumas das questões propostas em cada Unidade. A primeira UBP trata da trigonometria.

Research, Society and Development, v. 11, n. 3, e55611326955, 2022
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v11i3.26955

> "Ao longo da história, práticas socioculturais realizadas nos campos de atividade da agrimensura, da topografia e da geodésia contribuíram para a constituição de um campo da cultura matemática que, a partir de um certo momento, seria denominado trigonometria. A fim de que certos propósitos de determinados grupos sociais fossem atingidos, tais campos de atividade humana colocavam reiteradamente problemas que requeriam a realização, dentre outras, de práticas de: divisão e demarcação de terrenos; medições diretas, no espaço físico, de distâncias lineares e angulares acessíveis; medições indiretas de distâncias lineares e angulares inacessíveis; medições de áreas de superfícies. Por sua vez, no aperfeiçoamento dos processos de realização de tais práticas, artefatos tecnológicos ou instrumentos de medida foram projetados e produzidos. Duas práticas intimamente conectadas que se mostraram viáveis para se lidar com esses problemas foram a prática da triangulação e a prática da resolução de triângulos.
> Um topógrafo precisa determinar a distância entre uma árvore situada em um ponto A, relativamente a uma outra árvore situada em um ponto B, sabendo que entre A e B corre um rio, sem que haja a possibilidade de atravessa-lo. Descreva e discuta como a prática da triangulação se mostra adequada para resolver esse problema nos casos em que esse topógrafo disponha apenas de: 1. uma fita métrica, balizas, um rolo de barbante e um esquadro de carpinteiro; 2. uma fita métrica, balizas e rolo de barbante" (MIGUEL, 2010, p. 2-3).

A segunda discorre sobre Eratóstenes (276-196 a.C.)

> "Eratóstenes (276-196 a.C.), um dos grandes astrônomos gregos que viveram e trabalharam na cidade de Alexandria, desenvolveu uma prática para a determinação do comprimento da circunferência máxima da Terra e do raio da Terra.
> Investigue e comente sobre a vida e a obra de Eratóstenes, bem como sobre contexto político e sociocultural da cidade de Alexandria na época em que ele lá viveu e trabalhou. Por que razões o museu-biblioteca de Alexandria, a partir do terceiro século antes de Cristo, possibilitou o desenvolvimento de investigações matemático-astronômicas de caráter quantitativo, tais como, dentre outras, as desenvolvidas por Eratóstenes, Aristarco e Ptolomeu?" (MIGUEL, 2010, p. 5).

E a terceira, sobre a estimativa da distância entre a Terra, a Lua e o Sol.

> "Aristarco (cerca de 310-230 a.C.), ao lado de Eratóstenes (276 - 196 a.C.) e Ptolomeu (cerca de 150 d.C.), foi um dos maiores astrônomos da Antiguidade e, como os demais, trabalhou no museu de Alexandria. Dentre outras realizações, notabilizou-se por ter produzido práticas para se estimar a relação quantitativa entre as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol e para se estimar as medidas dos raios do Sol e da Lua em função do raio da Terra.
> [...]
> Seguindo os passos abaixo, você vai conhecer a prática proposta por Aristarco para a primeira dessas realizações. Avalie a adequação e o grau de precisão de tal prática, em função das suas finalidades, bem como os pressupostos nos quais cada uma de suas etapas se baseia.
> Passo 1 – Observou que a visibilidade da meia-lua exata ocorria pouco antes da lua entrar na fase de quarto crescente, isto é, pouco antes da Lua começar a percorrer a quarta parte de sua órbita, e que quando esta atingia a posição exata de quarto crescente, um pouco mais da metade da superfície lunar tornava-se visível. Concluiu que, quando a meia-lua exata era visível, o triângulo cujos vértices fossem a Terra (T), o Sol (S) e a Lua (L) seria retângulo em L.
> Passo 2 – Com base nessas observações e em determinadas hipóteses prévias, concluiu que se o ângulo que a lua percorre em sua órbita, ao passar da posição de meia-lua à de quarto crescente, medisse β, então, o ângulo entre a Lua, a Terra e o Sol, isto é, o ângulo LTS, mediria $90^{\circ} - \beta$. Por quê?
> Passo 3 – Concluiu, por outro lado, que esse ângulo LTS também deveria ser igual ao complemento do ângulo TSL. Por quê?
> Passo 4 – Mediu o intervalo de tempo que decorria entre a passagem da Lua da posição de meia-lua exata à de quarto crescente, chegando ao valor de 6 horas. Como teria feito essa medição do tempo?
> Passo 5 – A partir do resultado anterior, concluiu ser de aproximadamente 3° a medida do ângulo TSL. Por quê?
> Passo 6 – Construiu um triângulo semelhante ao Δ TSL e, medindo os lados T'L' e T'S' concluiu que T'S' era aproximadamente igual a 20 T'L', isto é, que TS era aproximadamente igual a 20 TL. Teria sido, de fato, um procedimento empírico dessa natureza, o utilizado por Aristarco para chegar a essa conclusão? Avalie o resultado obtido por Aristarco em relação ao atual" (MIGUEL, 2010, p. 6-7).

Esses três exemplos evidenciam a liberdade que o professor tem para estruturar uma UBP. Ele pode optar por apresentar um texto histórico, comentários sobre o fato histórico, imagens e até fazer um vídeo à sua problematização. Nas questões norteadoras, o docente pode direcionar os estudantes em suas pesquisas, análises ou reflexões, instigando-os e dando a eles sugestões e orientações para irem além de responder às questões abertas levantadas, mas também compreender o significado das ideias e sua importância sócio histórica e conceitual (MENDES, 2009).

Ainda nessa perspectiva teórico-metodológica, Mendes e Silva (2018) asseveram que essas práticas devem se pautar em princípios segundo os quais, nessa orientação,

> "é decisivo se conceber que a compreensão do mundo presente está, ao mesmo tempo, entre as disciplinas, nas diferentes disciplinas e além de qualquer disciplina, ou seja, está em uma conformação dialogal entre elas e ao mesmo tempo em uma integração que se mostre em contornos não disciplinares, que devem se inserir nas aulas de matemática na forma de unidades temáticas geradoras ou como projetos investigatórios temáticos nos quais os estudos da realidade poderão ser tomados como diretrizes para uma perspectiva sociocultural no ensino de matemática" (2018, p.47-48).

Conforme mencionado, fica evidente a vocação indisciplinar (não disciplinar) da elaboração e uso da UBP do desenvolvimento de ações de ensino que promovam uma aprendizagem investigativa, criativa e integrada sobre o conhecimento que se objetiva ser apreendido pelos estudantes em quaisquer níveis de ensino.

Nessa esteira, em um artigo intitulado "Problematização de práticas socioculturais na formação de professores de matemática", Mendes e Silva (2017) apresentam resultados sobre o desenvolvimento de uma pesquisa descritiva de algumas práticas socioculturais ou atividades profissionais, para a organização de um dossiê etnográfico que constituísse a matéria básica da elaboração de propostas didáticas para as aulas de Matemática, sob um enfoque indisciplinar, a partir das realidades pesquisadas. Neste sentido os autores reiteram que a proposta de produção de UBPs na formação do professor de Matemática pode ser uma opção didática que possibilite um melhor aproveitamento do processo de ensino e aprendizagem de Matemática com a finalidade de que a Educação Básica realmente forme o cidadão, tornando-o crítico e agente ativo na transformação da sociedade, conforme princípios indicados por Leontiev (1972) ao enfatizar que para a ocorrência de transformações na prática social, se torna necessário considerar que é a atividade externa, desenvolvida pelo sujeito social, em seu contexto sociocultural, é o objeto que destrava o círculo de processos mentais internos, para provocar a abertura de nossa compreensão a respeito do mundo objetivo.

Tal mundo objetivo poder ser compreendido na medida em que os estudantes compreendam que

> "Conceber a Matemática como um conhecimento produzido socialmente pressupõe que é na investigação da história da humanidade que podemos encontrar a origem das explicações naturais e experimentais nas interações sociais e imaginárias, fazendo surgir daí a cultura matemática como um conhecimento que é justificado a partir do surgimento de vertentes explicativas, ou seja, o exercício do pensamento como cultura. Tal conhecimento, quando experimentado, justificado e validado passa a ser tomado como ciência, isto é, como cultura científica" (MENDES; FARIAS, 2014, p.39).

Trata-se, portanto, de uma visão ampliada e aberta sobre o conhecimento que se quer produzir ou que seja apreendido pelos estudantes. Atualmente, foram identificadas algumas produções acadêmicas a esse respeito, conforme veremos a seguir.

4. Estudos e Produções Acadêmicas Fundamentadas nos Princípios da UBP

A concepção de Unidade Básica de Problematização já fundamentou algumas pesquisas de pós-graduação. Nos trabalhos produzidos por Soares (2011) e Mendes e Soares (2019), mereceram destaque os estudos investigativos sobre o desenvolvimento histórico dos logaritmos, com destaque para Napier, Briggs e Burgi, ao realizarem suas problematizações a respeito de processos históricos que pudessem oferecer informações para complementar as explicações presentes nos livros didáticos de Matemática no que concerne aos conteúdos sobre logaritmos, destacando a importância desse conhecimento (logaritmos) na medição da amplitude e da energia liberada pelas ondas presentes nos abalos sísmicos. Os autores explicam a formação e caracterizam esses fenômenos, apresentam o sismógrafo (instrumento usado para detectar e medir as vibrações causadas pelos terremotos), a equação logarítmica que calcula a magnitude de um terremoto e a classificação qualitativa conforme sua magnitude.

Na primeira atividade sugerida são dadas duas magnitudes de terremotos como exemplo e os estudantes devem determinar as respectivas energias dos abalos sísmicos e apontar qual foi o mais energético. Na segunda, é dada uma distância focal em termos temporais e uma amplitude máxima para os estudantes inferirem a respectiva magnitude e seus efeitos.

Seguindo a mesma fundamentação, Lima Filho (2013) apresenta orientações didáticas e UBPs a partir de um estudo exploratório de uma obra de Andrés de Céspedes que podem ser utilizadas na Educação Básica, relacionando vários conteúdos escolares. Essas orientações didáticas e as UBPs são desenvolvidas conforme a etapas sugeridas pelo autor, as quais apresentamos a seguir.

1. Escolha do material que relate práticas históricas relevantes para a evolução social de comunidades diversas e escolha de uma prática indisciplinar.
2. Cuidadosas leitura e tradução/interpretação da matemática emergente das práticas, envolvendo-se no contexto histórico da produção do material;
3. Escolha de uma problematização presente no material que expõe características semelhantes aquelas das ânsias dos seus alunos;
4. Materialização sucinta da problematização, e solução, na forma textual ou audiovisual mantendo aspectos de natureza empírica e estratégias matemáticas;
5. Elaboração de problematizações que envolvam práticas atuais que possam ser solucionadas, dadas as condições sociais que os alunos estejam inseridos, com as matemáticas utilizadas historicamente

Outras discussões a esse respeito são apresentadas por Pereira (2014), Pereira e Mendes (2015), quando apontam potencialidades e limites didáticos na elaboração de atividades para o ensino de Matemática. Para estes autores, as práticas das UBPs objetivam instigar os alunos a pensarem para solucionar um problema, o que corrobora para o desenvolvimento de uma rede de significados conceituais e metacognitivos e de habilidades matemáticas e científicas, visto que não há a necessidade de estar ligada somente com a matemática ou outras disciplinas.

Os estudos elaborados por estes autores estabelecem princípios teóricos e práticos segundo os quais os textos históricos devem passar por uma configuração ou conformação didática para que as informações neles presentes, se tornem compreensíveis e utilizáveis à aprendizagem matemática, de modo que o professor recorra a métodos e técnicas de ensino que sejam mais desafiadoras aos estudantes para que, assim, eles (os estudantes) desenvolvam atitudes cada vez mais ativas durante as aulas. Além disso, apresentam 08 (oito) cartas (Cartas a uma princesa da Alemanha sobre diversos temas de física e filosofia, de Leonhard P. Euler, 1768-1772) que podem ser exploradas didaticamente para a elaboração de UBPs e usadas nas aulas de Matemática.

Com essa mesma finalidade, em um trabalho produzido por Martins (2017), identificamos sugestões e orientações aos professores para organização e uso das UBPs, com especial atenção à liberdade criativa na sua estruturação, dada a pluralidade das turmas, as subjetividades dos estudantes e os objetivos de ensino, tal como fora proposto por Miguel e Mendes (2010, 2021). Neste sentido Martins (2017) considerou que o professor deve:

1. Apresentar brevemente a atividade, assim como seus momentos, para que fique claro o que deverá ser feito;
2. Formar grupos de 5 ou 6 alunos, segundo critério que achar melhor e considerando o total de estudantes da turma e deixar claro que os estudantes são livres para pensar nos métodos de resolução das atividades propostas [este item

está junto com o anterior, contudo acreditamos que explicitá-lo ajude a direcionar professores que desejam começar a utilizar as UBPs em suas aulas];

3. Distribuir o tempo disponível para (a) orientações, (b) pesquisa e resolução das atividades, (c) apresentação dos trabalhos e discussões e (d) avaliação;
4. Instigar todos os participantes a apresentarem e discutirem os resultados, não havendo certo ou errado neste momento;
5. Apresentar o conteúdo escolar presente na UBP possibilitando os alunos a relacionarem os conhecimentos socioculturais com o matemático;
6. Avaliar as resoluções das atividades individualmente e coletivamente, pedindo aos estudantes que registrem os momentos de dificuldades, as percepções sobre a UBP, dentre outras coisas.

Nas problematizações propostas, Martins (2017) analisa e discute algumas estruturas gráficas de artefatos produzidos em algumas práticas socioculturais para o estudo de simetria, no nível do ensino fundamental. Para explorar a simetria de reflexão e desenvolver as noções de ponto médio, reta, direção e sentido, apresenta o complexo arquitetônico e paisagístico do Ver-O-Peso – patrimônio material de Belém, PA – destacando o mercado de peixe com sua arquitetura magistral, a feira de artesanatos e cerâmicas com seus ornamentos que impressionam pela beleza e precisão.

Na sequência, o autor traz quatro figuras que mostram o mercado de peixe, um artesanato, uma grade de ferro e um azulejo decorado para que 12 (doze) questões abertas sejam respondidas. A primeira dessas interrogações sugere que as imagens sejam observadas da esquerda à direita e da direita à esquerda, com o intuito de que os estudantes busquem e destaquem os elementos que se repetem nessas fotografias. Outro item pede a opinião dos alunos sobre a possibilidade de identificação de uma característica comum a todas as imagens apresentadas.

É importante reiterarmos continuadamente que essas práticas, como as mencionadas até aqui, não necessariamente devem ser históricas no sentido do tempo e do espaço, mas sim práticas que se originam de um contexto sociocultural no qual as mesmas foram geradas das e nas atividades de sobrevivência humana e organização social e das quais se originaram uma multiplicidade de saberes, princípios, regras de vivências, explicações e modos de prever soluções para situações problemáticas futuras. Daí a característica fortemente histórica dessas atividades, ou seja, sua característica sócio histórica no sentido Vigotskiano ou mesmo na perspectiva da teoria da atividade proposta por Leontiev (1972, 1978).

Nos trabalhos mencionados anteriormente nesta seção, notamos que em todos são realizadas explorações investigativas e didáticas de materiais, sejam eles livros ou artefatos históricos, com vistas à elaboração de uma UBP, além de serem dados direcionamentos aos professores, quer para o planejamento, quer para a execução de uma Unidade de Problematização, sempre no sentido de realizar uma aplicação das teorias estabelecidas por Miguel e Mendes (2010, 2021), com a intenção e reiterar os princípios e fundamentos expostos pelos referidos autores.

Com base em nossas interpretações e reflexões, sistematizamos esses direcionamentos e organizamos um infográfico, conforme mostramos na figura 1. Nesse esquema conceitual acrescentamos indicativos nos quais propomos que durante o planejamento e uso de UBPs, os docentes elenquem competências e habilidades dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 2000) e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) para serem desenvolvidas durante o processo de investigação, problematização e resolução de situações problemáticas a serem propostas, e que no momento da avaliação da aprendizagem, os professores não foquem somente nas especificidades dos conteúdos, mas também verifiquem o desenvolvimento de competências e habilidades alcançadas pelos estudantes.

Research, Society and Development, v. 11, n. 3, e55611326955, 2022
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v11i3.26955

Figura 1. Orientações para elaboração e uso de uma UBP.

Fonte: Elaborado pelos autores, a partir das referências bibliográficas pesquisadas.

Diante do que foi exposto anteriormente, consideramos importante reiterar que as etapas aqui organizadas e propostas não devem ser vistas como sendo postas por um manual, mas sim apenas como orientações didáticas que podem auxiliar aquelas, ou aqueles, professoras (es) que desejam elaborar uma problematização histórica e aplicá-la em ambientes educacionais. Acreditamos que assim podemos dar possibilidades reais para que novos docentes recorram às UBPs na Educação Básica.

Com base no que foi exposto, apresentaremos na seção a seguir, nossos modos de elaborar uma investigação e problematização que conduzam à elaboração e uso de UBPs, e daí poder sugerir aos professores, encaminhamentos para seu exercício docente. Conforme já anunciado anteriormente, tomaremos como um exemplo temático o livro *A Geometria*, de René Descartes, devido o referido texto conter resultados concretos concernentes ao método proposto por René Descartes em seu *Discurso do Método* e por mostrar como tal método pode se expandir à problematização investigativa em diversas áreas de conhecimento, principalmente sob um enfoque transversalizante, que envolve não só a matemática. Igualmente por conter, em si, um potencial conceitual e didático a ser explorado na forma de elaborações de problematizações históricas que possam ser usadas na Educação Básica, contribuindo, assim, para a inserção dos estudantes no exercício de práticas investigativas na aprendizagem dos estudantes, a partir de um ensino por meio do qual o professor utilize as ideias relacionadas às Unidade Básicas de Problematização como suporte para elaborar as atividades de problematização em sala de aula e fora dela.

5. UBPs como Possibilidades Concretas de Abordagens Conceituais e Didáticas

Nesta seção apresentaremos nossa sugestão de possibilidade concreta para possíveis abordagens conceituais e didáticas no ensino de geometria, a partir da identificação de conteúdos escolares emergentes do livro *A Geometria*, tomando como base as diretrizes norteadoras de elaboração e uso de uma UBP no ensino de Matemática. Neste sentido, tomaremos os conteúdos que podem identificados no referido livro e indicaremos alguns modos que podem ser tomados pelo professor para a elaboração de UBPs no ensino de matemática na Educação Básica.

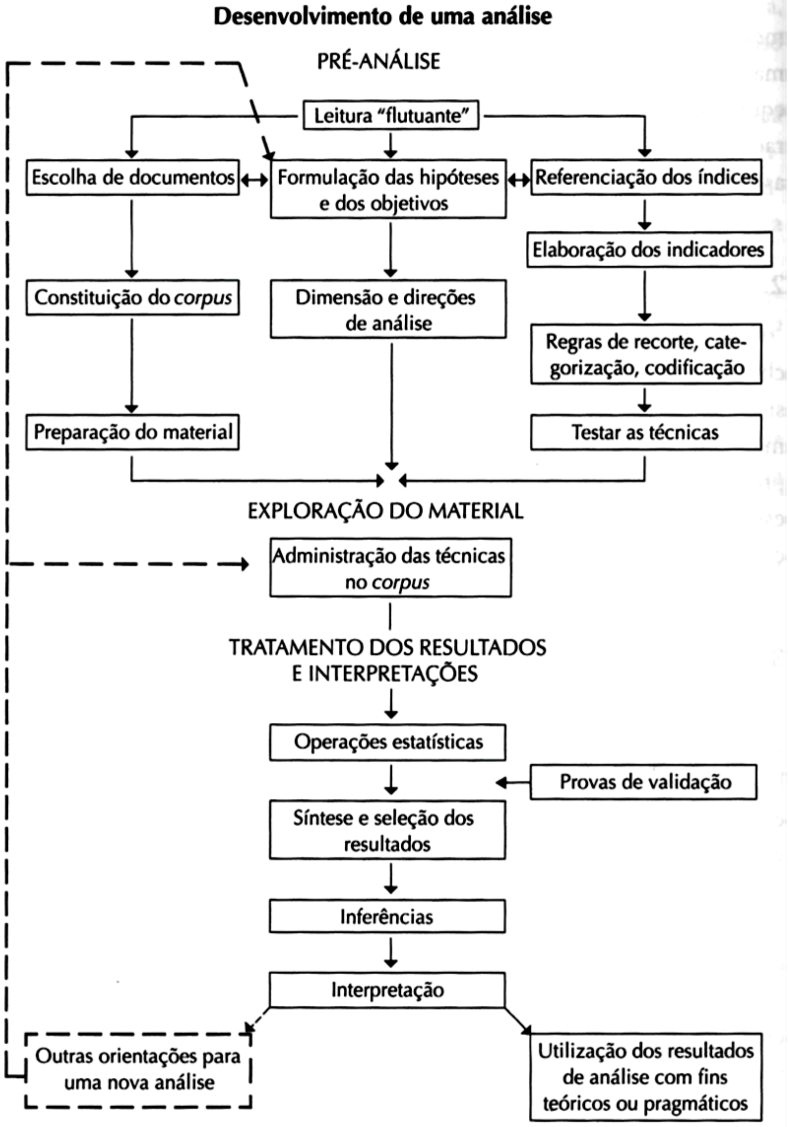
5.1 Identificando os conteúdos escolares

Para alcançar o objetivo estabelecido para esta seção, o livro foi submetido a uma análise de conteúdo, assim como propõe Bardin (2016). A esse respeito, a referida análise foi dividida em três momentos: (1) pré-análise, cujo objetivo foi operacionalizar e sistematizar as ideias iniciais identificadas, de maneira que pudessem conduzir a um desenvolvimento mais preciso e detalhados das sucessivas operações que envolvessem aspectos conceituais intencionados pela pesquisa; (2) exploração do material identificado na pré-análise, momento em que as informações puderam ser transformadas em informações mais sistematizadas a respeito da geometria escolar almejada em nosso planejamento investigativo inicial e (3) tratamento dos resultados estabelecidos na pesquisa bibliográfica, a proposição das inferências que possibilitaram nossa interpretação, por meio das quais as informações exploradas ganharam significância e foram validadas, de modo a possibilitar a elaboração e validação das UBPs. Em nossas reflexões verificamos que Bardin (p. 132, 2016) apresenta um mapa para “desenvolvimento de uma análise” que foi considerado na pesquisa (ver Figura 2 na próxima página).

A pré-análise foi composta pela leitura flutuante do livro visando a escolha das informações que atendessem aos nossos objetivos, referências e indicadores dos conteúdos de geometria a serem explorados posteriormente, não seguindo necessariamente essa ordem. Nosso objetivo influenciou diretamente na escolha dos documentos, não tendo sentido lógico a escolha de outro texto senão o livro *A Geometria* para constituir o *corpus* de análise; e no apontamento dos indicativos das informações que seriam centrais na análise, sendo estes (a) conceitos e/ou definições usadas para iniciar ou dar prosseguimento em uma explicação do assunto e (b) tópicos gerais que frequentemente aparecem em capítulos de livros didáticos. Para a realização da codificação, foram usados como unidades de registro as palavras-chave e os temas, tendo suas respectivas unidades de contexto as referências explícitas e implícitas dos conteúdos. A fase da exploração do material segue a estrutura organizada na pré-análise, o que permite a elaboração de quadros para ordenar os conteúdos emergentes. O tratamento dos resultados é realizado com a descrição da forma de como esses conteúdos emergem do texto de Descartes; ou seja, é feito um relato de como os conteúdos estão presentes no livro.

Para efeito da análise foi usada como fonte o livro *Discurso do Método & Ensaios*, em sua versão em português traduzida por César Augusto Battini, Ériko Andrade, Guilherme Rodrigues Neto, Marisa Carneiro de Oliveira Franco Donatelli, Pablo Rubén Mariconda e Paulo Tadeu da Silva, organizada por Pablo Rubén Mariconda e publicada no ano de 2018, pela Editora Unesp (DESCARTES, 2018). Além da tradução, este livro apresenta um capítulo introdutório, no qual Pablo Mariconda discorre sobre a ciência e a técnica ali presentes, destacando o contexto da escrita e publicação do Discurso de Descartes; elementos do que chama de filosofia prática do Método e dos Ensaios, juntamente com suas características notáveis; e um índice, onde sumariza as principais dificuldades explicadas e assuntos abordados nos três livros seguintes ao Discurso.

Figura 2. Mapa para o "desenvolvimento de uma análise" proposto por Bardin (2016).



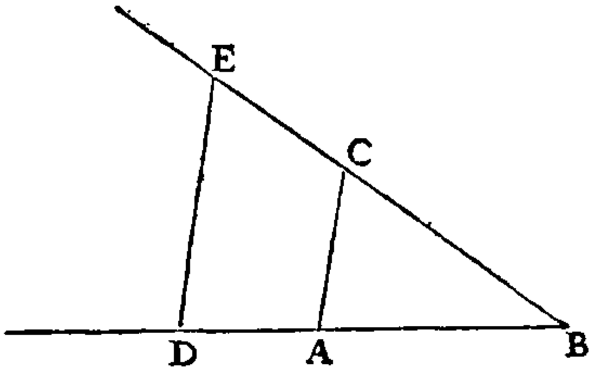
Fonte: Bardin (2016, p. 132).

5.2 Relatando a emersão dos conteúdos

As operações aritméticas básicas são abordadas de maneira que Descartes as vê, aplicadas à geometria, descrevendo a adição como o acréscimo e a subtração como uma retirada de uma linha de outra. Para construir sua interpretação de multiplicação, divisão e da extração de raiz quadrada, é usada a ideia de unidade – linha (geometria) que é numericamente igual a 1 (aritmética) –, o teorema de Tales, razão e proporção, semelhança de triângulos e teorema de Pitágoras.

A multiplicação de dois segmentos de reta, BC e BD, é feita tomando AB como a unidade, unindo os pontos A e C, e em seguida desenhando o segmento de reta DE sendo paralela a AC. A divisão é organizada similarmente, contudo de forma inversa: para dividir BE por BD, é necessário unir os pontos D e E, e desenhar o segmento AC paralelo a DE. A Figura 3 esquematiza a construção final.

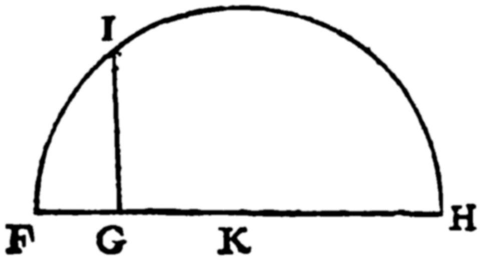
Figura 3: Multiplicação e divisão de linhas.



Fonte: Descartes (2018).

A extração da raiz quadrada de um segmento de reta GH é feita somando-o a unidade FG e dividindo FH em duas partes iguais, no ponto K, que será o centro de um semicírculo, desenhado de G a H. Em seguida, é desenhada uma linha perpendicular a FH sobre o ponto G até o ponto I, sobre o semicírculo, sendo este segmento (GI) a raiz quadrada. A construção feita aqui é mostrada na Figura 4.

Figura 4: Extração de raiz quadrada.



Fonte: Descartes (2018).

Na sequência, Descartes acredita que seja suficiente nomear cada uma das semirretas por letras para não ter a necessidade de as desenhar e explica que, nomeando uma de a e outra de b, as formas de escrever as operações básicas feitas antes geometricamente, sendo $a + b$, a adição, $a – b$ a subtração, ab a multiplicação, a/b a divisão, a^2 a multiplicação de a por ela mesma, a^3 para multiplicar mais uma vez, e assim por diante. Mostra, ainda, as formas $\sqrt{a^2 + b^2}$ e $\sqrt{C. a^3 - b^3 + abb}$ para descrever a extração da raiz quadrada de $a^2 + b^2$ e a raiz cúbica de $a^3 - b^3 + abb$, e assim para outras raízes.

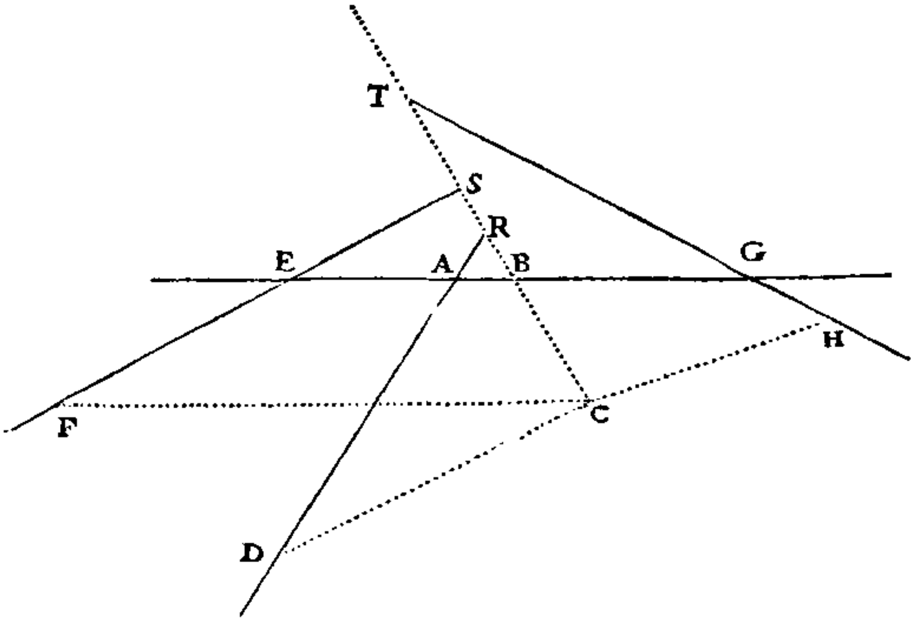
Aqui é chamada a atenção para (1) o fato de que as expressões a^2 ou a^3, são concebidas como linhas, ainda que denominadas como quadrados, cubos e etc. e (2) para que na escrita de uma mesma linha, todos os termos que estejam expressos com as mesmas dimensões como em $\sqrt{C. a^3 - b^3 + abb}$ ou em $\sqrt{C. aabb - b}$ – neste último exemplo, deve-se subentender que a primeira quantidade está dividida uma vez pela unidade, e a segunda está multiplicada duas vezes pela mesma unidade – e (3) para sempre ser feito um registro dos nomes das linhas quando são inseridas ou mudadas; ou seja, identificar qual linha passa a ser tal letra. A partir dessa última especificação, são consideradas várias linhas de modo que sejam dependentes uma das outras e formem um sistema de equações que pode ser resolvido usando geometria e álgebra.

Por conseguinte, em alguns casos há a possibilidade da equação mais simples encontrada ser um quadrado desconhecido da forma $z^2 = az + bb$, $z^2 = -az + bb$ ou $z^2 = az - bb$, com a e b positivos. As soluções desses quadrados são feitas usando fundamentalmente as noções das operações aritméticas básicas e o teorema de Pitágoras.

Feito isso, Descartes passa a dedicar-se ao problema de Pappus no plano. O enunciado da questão pode ser dado em sua forma mais simples como coloca Descartes (2018, N.T, BATTISTI). A Figura 5 ajuda a compreender o enunciado, esquematizando-o.

> “Sejam AB, AD, EF, GH quatro linhas retas dadas em posição (mas não em seu comprimento), encontrar um ponto C de modo eu, tendo extraído outras quatro retas, como CB, CD, CF, CH, em ângulos dados com outras quatro retas dadas, o produto de duas dessas retas desconhecidas tenha uma proporção dada (a igualdade) para com as outras duas restantes (ou seja, $CB \cdot CD = CF \cdot CH$).” (Descartes, 2018, p. 375, N.T, BATTISTI).

Figura 5: Representação do problema de Pappus com quatro linhas.



Fonte: Descartes (2018).

5.3 Propondo as unidades básicas de problematização

Apresentaremos a seguir duas propostas de UBP, indicando as competências e habilidades dos PCN (Brasil, 1997; 2000) e da BNCC (Brasil, 2018) que podem ser desenvolvidas a partir das problematizações históricas.

UBP 01 – Operações aritméticas estabelecidas no livro I de *A Geometria* de Descartes

Público Sugerido: Estudantes do 1º Ano do Ensino Médio

Objetivos:

1. Desenvolver as seguintes competências e habilidades conforme propõe os PCN:

a. Representação e comunicação:

(i) ler, interpretar e utilizar representações matemáticas;

(ii) transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica e vice-versa;

(iii) exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.

2. Desenvolver as seguintes competências e habilidades da BNCC:

a. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos, na busca de solução e comunicação de resultados de problemas;

(i) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano.

Problematização histórica

Os números surgiram a partir da necessidade prática humana de contar coisas e objetos, como os dias, cavalos, pedaços de pedra, etc. O primeiro procedimento aritmético advém da correspondência um a um, que pôde, por exemplo, auxiliar um pastor a contar o seu rebanho fazendo entalhes em um pedaço de madeira ou empregando uma pedra para cada cabra.

Com o desenvolvimento do artesanato de instrumentos especializados à prática agrícola, comércio e com a repartição desigual dos produtos naturais, a permuta comercial foi tornando-se indispensável. O intercâmbio foi usado na permuta de objetos de grande necessidade ou de mercadorias de matéria-prima e, a partir do desenvolvimento e intensificação da comunicação, as permutas de mercadorias passam a ser realizadas baseadas em unidades ou padrões fixos, sendo possível estimar o valor de bens, com o caráter econômico e jurídico.

O progresso da agricultura e engenharia estimularam o desenvolvimento geométrico e algébrico. Na Grécia antiga, por exemplo, um termo desconhecido era considerado como uma distância; o produto de dois termos desconhecidos, como uma área de um retângulo; e o produto de três, representava o volume de um paralelepípedo, não conseguindo ter representações para a multiplicação de quatro variáveis, ou mais.

No período do renascimento, René Descartes mostra como as operações aritméticas básicas podem ser realizadas usando segmentos de retas e a ideia de unidade. A adição é feita adicionando, e a subtração retirando uma linha da outra. A multiplicação de dois segmentos, BC e BD, é realizada colocando-os de maneira que a extremidade do primeiro coincida com a do segundo, tomando uma unidade representada como AB, unindo os pontos A e C, e desenhando o segmento de reta DE paralelo à AC para que BE seja o produto. A divisão de BE por BD é organizada de maneira inversa.

A extração da raiz quadrada é pensada somando a unidade FG ao segmento GH, dividindo FH em duas partes iguais, no ponto K que será centro do semicírculo desenhado de F a H. Em seguida, desenha-se uma linha perpendicular a FH, do ponto G até o ponto I, sobre o semicírculo, sendo este segmento a raiz quadrada.

1. Identifique a diferença entre a representação fundamentada no pensamento grego e no cartesiano. Discorra sobre ela.
2. Analise as representações cartesianas das operações aritméticas e elabore esquemas gráficos sobre cada operação.
3. Investigue algébrica e geometricamente os passos organizados por René Descartes e explique a importância da ideia de unidade.
4. Examine a relação entre os segmentos GI e GH e elabore representações gráficas para as situações encontradas.
5. Compare e discorra sobre os esquemas gráficos elaborados com as figuras originais de René Descartes.

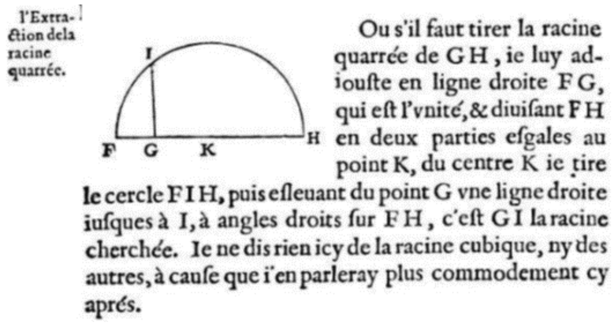
UBP 02 – Extração da raiz quadrada por processo geométrico

Público Sugerido: Estudantes do 1º Ano do Ensino Médio

Objetivos: Desenvolver competências e habilidades relacionadas às conexões e representações aritmética, geométrica e algébrica, concernentes ao conhecimento matemático e extra matemático sobre o conceito de raiz quadrada, triângulos retângulos e relações métricas no triângulo como semelhanças e congruências.

Problematização histórica

Na parte inicial do Livro *A Geometria*, Descartes enuncia uma proposição segundo a qual as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes (refere-se a operações com números positivos) podem ser feitas geometricamente usando segmentos de linha, cujos comprimentos representam os números para operar, e um segmento de comprimento 1, colocado adequadamente. Para extração de raízes quadradas, Descartes afirma o seguinte:



l'Extra-ction dela racine quarrée.

Ou s'il faut tirer la racine quarrée de GH, ie luy adiouste en ligne droite FG, qui est l'vnité, & diuisant FH en deux parties esgales au point K, du centre K ie tire le cercle FIH, puis esleuant du point G vne ligne droite iusques à I, à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cause que i'en parleray plus commodement cy aprés.

"Se a raiz quadrada de *GH* deve ser extraída, ela é adicionada em linha *FG*, que é a unidade e dividindo *FH* em duas partes iguais pelo ponto *K*, tendo esse ponto como centro o círculo *FIH*; então levantando do ponto *G* uma linha reta, com ângulos retos em *FH*, até *I*, *GI* é a raiz procurada."

Figura 6. Processo geométrico de Extração da raiz quadrada.
Fonte: Livro *A Geometria* de Descartes, 1637.

A partir da leitura ampliada e reflexão sobre o tema proposto na Figura 6 solicita-se que os estudantes explorem os desafios e questões propostas a seguir.

1. Prove a afirmação que Descartes faz com as condições dadas, ou seja, verifique que $GI = \sqrt{GH}$.
2. Analise a situação problema proposta por Descartes na figura 6 e comente como sua solução pode ser abordada a partir de pelo menos três perspectivas.
3. Partindo da figura 6, estabeleça a igualdade $GI^2 = KI^2 – KG^2$.
4. Por semelhança de triângulos, mostre que o triângulo FIH é retângulo em I. O que deve ser considerado para provar essa afirmação?
5. Usando coordenadas (e o teorema de Pitágoras), como no caso de $GH > 1$, estabeleça um sistema de coordenadas retangulares com origem no ponto K, ou seja, K é o ponto (0,0) e represente o triângulo GIK.

Para que se efetive mais produtivamente a exploração conceitual e didática dessa UBP o professor deve verificar previamente o conhecimento dos estudantes acerca do conceito de semelhança, que em alguns casos envolvem homotetias e quando necessário, revisar os conhecimentos prévios relacionados à caracterização dos triângulos isósceles. A ideia desta UBP é desenvolver diversas habilidades e competências relacionadas à geometria do triângulo retângulo.

Há, ainda, outros conhecimentos prévios necessários como aqueles relacionados à soma dos ângulos internos de um triângulo, de modo a responder outros questionamentos e desafios como listamos a seguir.

1. Discutir aspectos geométricos relacionados à desigualdade triangular.
2. Utilizar a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo para estabelecer semelhanças, congruências e desigualdades entre triângulos presentes na figura 6.
3. Determinar medidas de ângulos internos e externos de um triângulo, conhecendo as medidas dos outros ângulos.
4. Construir uma figura semelhante a uma figura dada, submetendo-a a uma homotetia de razão menor ou maior que 1.
5. Construir uma figura congruente a uma figura dada, submetendo-a a uma homotetia de razão igual a 1.
6. Resolver Problemas que envolvam a semelhança e congruência de triângulos.

Para Refletir

Esta UBP pode ser utilizada em diferentes ocasiões, dependendo dos conhecimentos, competências e habilidades que os professores queiram desenvolver com os estudantes. Pode ser usado em todo o ensino médio, de modo a explorar o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos, habilidades e competências relacionadas à semelhança de triângulos, congruências, teorema de Tales, semelhanças de figuras em diferentes contextos, critérios de semelhança de triângulos, bem como resolver problemas que envolvem semelhança e congruência de triângulos.

6. Considerações Finais

Por ter aspectos construtivistas, os professores que desejam elaborar e/ou aplicar uma problematização podem ter dificuldades no processo, principalmente no que tange às práticas indisciplinares, pois, podem ficar tentados a manter o caráter disciplinar na atividade dado que os professores em início de carreira têm os seus antigos professores, que geralmente atuaram em um contexto de ensino tradicional, como fonte de inspiração, o que dificulta o processo de romper com a educação bancária.

Para tanto, é necessário que o educador entenda que é preciso agir de maneiras distintas da tradicional se permitindo vivenciar e experimentar novas abordagens metodológicas de ensino, nas quais ele seja um provocador, um mediador do conhecimento como a das UBPs. É preciso ainda estar preparado para aceitar o erro no seu próprio processo de aprendizagem e adaptação com a abordagem, pois o erro pode proporcionar reflexões sobre o planejamento e aplicação da problematização visando a melhoria na qualidade do ensino.

Esse processo de adaptação com as problematizações históricas também pode se fazer presente na perspectiva discente, pois as (os) estudantes poderão apresentar certas resistências quanto à resolução das atividades. E, considerando que acima demos um enfoque no desenvolvimento de competências e habilidades na UBP, as questões das problematizações podem ser colocadas inicialmente de forma individual, auxiliando na identificação e resolução para as (os) alunas (os) manterem o foco em uma única tarefa. Assim, o professor deve observar com cautela a evolução cognitiva e familiaridade de cada membro da turma com a abordagem das UBPs para propor a relação entre duas ou mais ideias.

É conveniente propor um exercício de observação, reflexão e descrição da situação mencionada na figura 6 antes de introduzir os critérios de exploração temática proposto nesta UBP, visando com isso alcançar um melhor desenvolvimento das atividades e mais criatividade matemática nas tentativas de solução dos problemas e desafios propostos. As perguntas geradoras que o professor faz devem ser direcionadas a obtenção desse conhecimento que pretende alcançar. Igualmente, propomos algumas indicações metodológicas como ler atentamente a situação problema apresentada e comentar brevemente a leitura quanto a seus aspectos extra matemáticos e as relações presentes na situação principalmente na relação entre história e Matemática.

No caso do conhecimento matemático abordado neste artigo, as atividades são propostas com base em uma introdução histórica relacionada ao desenvolvimento da geometria analítica com o propósito de contextualização. Logo se expõe um breve texto histórico com conteúdo matemático, intencionando apresentar uma ou mais problematizações que possam utilizar-se para introduzir e possibilitar a aprendizagem de conhecimentos matemáticos e extra matemáticos relacionados ao tema.

Neste artigo, os fragmentos de textos apresentados têm a vantagem de poder ser utilizado em diferentes níveis de ensino e para distintos enfoques, especificamente para representar pontos e figuras geométricas em um plano com um sistema de eixos cartesianos, bem como para determinar algebricamente o ponto médio de um segmento, ou para identificar pontos no interior e no exterior de figuras fechadas em um plano com um sistema de eixos cartesianos.

Questões individuais podem ser úteis ainda quando o docente pretende realizar as atividades em uma única aula ou não dispõe de muito tempo para realizar a atividade em sala, tal como acontece na realidade da maioria das escolas públicas brasileiras. Uma alternativa pode ser a construção de uma sequência de Unidades (no plural) de Problematização "simples", que busquem o desenvolvimento de uma única habilidade.

As práticas estudantis proporcionadas pelas UBPs em si, promovem o desenvolvimento direto da primeira, segunda e sétima competência geral da Educação Básica postas pela BNCC, pois aprecia e utiliza artefatos historicamente construídos para elaborar a problemática a ser estudada; insere as (os) estudantes em situações investigativas, possibilitando o exercício da autonomia na resolução de problemas abertos onde são valorizadas as formulações e testes de hipóteses, as elaborações de explicações que não sejam restritas a somente uma área do conhecimento e o debate entre os grupos sobre essas explicações. Isso inclui também o segundo e quarto objetivos gerais dos PCN do Ensino Fundamental (Brasil, 1997) e a competência de Investigação e Compreensão presentes em todas as áreas dos PCN do Ensino Médio (Brasil, 2000) e nas Orientações Curriculares dos PCN (Brasil, 2002).

Por fim, uma interrogativa que não foi respondida com essa pesquisa trata sobre “como avaliar as respostas dos estudantes durante o processo de resolução de uma UBP?”. Observando que neste artigo pretendemos dar um enfoque especial, podemos pensar em “como avaliar o desenvolvimento das competências e habilidades proporcionadas por uma UBP?”. Compreendemos que questões que envolvam a(o) docente também são passíveis de estudos, tais como “quais possíveis dificuldades docentes e discentes que podem surgir durante a prática de sala de aula com as UBPs?” ou “quais dificuldades relacionadas à formação de professores influenciam a elaboração de UBPs por profissionais da Educação Básica?”

Diante do que mencionamos no parágrafo anterior concluímos que tais questionamentos avaliativos acerca do uso de práticas investigativa envolvendo o uso de UBPs podem gerar pesquisas que certamente contribuirão para enriquecer processos de ensino e aprendizagem matemática com enfoques interdisciplinares e promotores da autonomia de quem estuda e de quem aprende.

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES –, pelo suporte financeiro.

Referências

Bardin, L. (2016). *Análise de Conteúdo*. Edições 70.

Brasil. (1997). Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Nacionais Curriculares*.

Brasil. (2000). Ministério da Educação. *Parâmetros Nacionais Curriculares: Ensino Médio*.

Brasil. (2002). Ministério da Educação. *Orientações Educacionais Complementares aso Parâmetros Nacionais Curriculares*.

Brasil. (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*.

Descartes, R. (2018). *Discurso do Método & Ensaios*. Editora Unesp. Mariconda, P. R. (org.). Tradução de Battisti, C. A., Andrade, É., Rodrigues Neto, G., Donatelli, M. C. de O. F., Mariconda, P. R., & Silva, P. T. da.

Flick, U. (2009). *Qualidade na pesquisa qualitativa*. Porto Alegre: Artmed. (Coleção Pesquisa Qualitativa / Coordenada por Uwe Flick)

Flick, U. (2012). *Introdução à metodologia de pesquisa: um guia para iniciantes*. Penso.

Gil, A. C. (2008). *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social*. (6a ed.), Atlas.

Godoy, A. S. (1995). Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *RAE - Revista de Administração de Empresas*. 35(2), 57–63.

Leontiev, A. (1972). *Actividade e consciência*. https://www.marxists.org/

Leontiev, A. (1978). *Actividade, consciência e personalidade*. https://www.marxists.org/

Lima Filho, R. R. C. (2013). *Um Estudo de Práticas Matemáticas Históricas e Sugestões de Uso na Matemática Escolar*. 144 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e da Terra) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Martins, J. P. (2017). *Ensino de simetria por meio de problematização sociocultural*. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará.

Mendes, I. A. (2009). *Matemática e Investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. (2a ed.), Livraria da Física. Coleção Contexto da Ciência.

Mendes, I. A. (2019). Active Methodologies as Investigative Practices in the Mathematics Teaching. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(3), 501-512. https://doi.org/10.29333/iejme/5752

Mendes, I. A.; & Silva, C. A. F. (2018). Problematization and Research as a Method of Teaching Mathematics. *International Electronic Journal Of Mathematics*

Education. 13(2), 41-55. https://doi.org/10.12973/iejme/2694

Mendes, I. A.; & Silva, C. A. F. (2017). Problematização de práticas socioculturais na formação de professores de matemática. *Revista Exitus*, Santarém/PA, 7(2), 100-126. https://doi.org/10.24065/2237-9460.2017v7n2ID303

Mendes, I. A.; & Silva, C. A. F. (Orgs.). (2014). *Práticas socioculturais e educação matemática* São Paulo: Editora Livraria da Física. (Coleção contextos da ciência).

Mendes, I. A.; & Soares, E. C. (2019). *LogAritmos (Números da Razão).* Enfoques históricos, epistemológicos e escolares. Editora Livraria da Física. (Série História da Matemática para professores).

Miguel, A. (2010). *Lista Única de Unidades Básicas de Problematização Indisciplinar*. http://pt.scribd.com/doc/76381173/ANTIGA-LISTA-UNICA-UBPs-2010#scribd

Miguel, A., & Mendes, I. A. (2010). Mobilizing Histories in Mathematics Teacher Education: memories, social practices, and discursive games. Berlin: *ZDM Mathematics Education*, 42, 381-392. https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-010-0255-8

Miguel, A., & Mendes, I. A. (2021). Mobilizando histórias na formação inicial de educadores matemáticos: memórias, práticas sociais e jogos discursivos. *Rematec*, Belém (PA), 16, Fluxo Contínuo, 120-140. 10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p120-140.id324

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2013). Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. *René Descartes y la Geometría Analítica.* San José, Costa Rica.

Pereira, D. E. (2014). *Correspondências Científicas como uma Relação Didática entre História e Ensino de Matemática*: o exemplo das cartas de Euler a uma princesa da Alemanha. 281 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Pereira, D. E., & Mendes, I. A. (2015). *As correspondências entre Euler e a princesa alemã como unidades básicas de problematização para as aulas de Matemática*. Editora Livraria da Física. Série História da Matemática para o Ensino, v. 3.

Soares, E. C. (2011). *Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula*. 141 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.