

Impacto dos saltos na componente discreta da volatilidade: o caso da Petrobrás

Jumps impact on the volatility discontinuous component: the case of Petrobras

Impacto de los saltos en el componente discreta de la volatilidad: el caso da Petrobras

Recebido: 21/03/2022 | Revisado: 28/03/2022 | Aceito: 03/04/2022 | Publicado: 10/04/2022

Ana Claudia Festucci de Herval

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3367-3565>

Universidade Federal de Lavras, Brasil

E-mail: anafestucci@outlook.com

Thelma Sáfyadi

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4918-300X>

Universidade Federal de Lavras, Brasil

E-mail: safadi@ufla.br

Resumo

A presença de saltos possui forte impacto na previsão da volatilidade de ativos financeiros. Estes saltos podem ser compreendidos como grandes mudanças estruturais locais na série de preços, e frequentemente estão associados à uma questão comportamental dos investidores, em geral causada por anúncios de notícias macroeconômicas. A abordagem de ondaletas pode ser utilizada em situações como esta, uma vez que detectam locais de salto com eficiência. No entanto, é comum que essa detecção seja realizada apenas no nível de maior detalhe, já que é onde espera-se que os ruídos estejam localizados. Neste contexto, o presente trabalho explorou a presença de saltos nos diversos níveis de decomposição da série estudada, a fim de apurar a estimação da variação devida à saltos na variabilidade do processo de preço. Para isto, uma análise foi realizada a partir da série de log-preços das ações da PETROBRÁS (PETR4), na frequência de 1 minuto, em um período com uma forte queda evidenciada por uma intervenção na presidência da estatal. A metodologia utilizada evidenciou que, particularmente para esta queda de preços citada, a variabilidade devida à saltos é impactada de forma que sua estimativa mais que triplica ao se considerar também os níveis de menor frequência, correspondentes a horizontes de investimentos que vão de minutos até 1 a 2 horas de negociação, o que destaca também o período de tempo que o efeito da notícia leva para diluir no mercado de ações.

Palavras-chave: Análise de saltos multiescala; Análise de volatilidade; Dados financeiros de alta frequência; Decomposição de ondaletas; Mercado brasileiro de ações; Séries temporais financeiras; Ensino de finanças.

Abstract

The presence of jumps has an important impact on forecasting volatility of financial assets. These jumps can be understood as a large local structural changes in the price series and are often associated at a behavioral issue of investors, usually caused by macroeconomics news announcements. The wavelets approach can be used in these situations once it detects jumps locations efficiently. However, it is common that this detection to be performed only at the finest level since this is where the noises are expected to be located. In this context, this work explored the presence of jumps in the different levels of decomposition of the studied time serie, to determine the estimation of the variation due to jumps in the variability of the price process. For this, an analysis was carried out from the series of log-prices of PETROBRAS shares (PETR4), at a frequency of 1 minute, in a period with a strong fall evidenced by an intervention in the presidency of the state-owned company. The methodology used showed that, particularly for this mentioned price drop, the variability due to jumps is impacted in a way that its estimate more than triples when also considering the low frequency levels, corresponding to investment horizons ranging from minutes to 1 to 2 hours of trading, which also highlights the length of time the news effect takes to dilute in the stock market.

Keywords: Multi-scale jump analysis; Volatility analysis; High-frequency financial data; Wavelet decomposition; Brazilian stock market; Financial time series; Finance teaching.

Resumen

La presencia de saltos tiene un fuerte impacto en la previsión de la volatilidad de los activos financieros. Estos saltos pueden entenderse como grandes cambios estructurales locales en la serie de precios y, a menudo, se asocian a un problema de comportamiento para los inversores, generalmente causado por anuncios de noticias macroeconómicas. El enfoque de wavelet se puede utilizar en estas situaciones una vez que detecta ubicaciones de salto de manera eficiente. Sin embargo, es común que esta detección se realice solo en el nivel más fino, ya que es donde se espera que se localice los ruidos. En este contexto, el presente trabajo exploró la presencia de saltos en los diferentes niveles de descomposición de la serie estudiada, con el fin de determinar la estimación de la variación por saltos en la variabilidad del proceso de precios. Para ello, se realizó un análisis a partir de la serie de log-precios de las acciones

de PETROBRAS (PETR4), con una frecuencia de 1 minuto, en un período con fuerte caída evidenciada por una intervención en la presidencia de la estatal. La metodología utilizada mostró que, particularmente para esta caída de precios mencionada, la variabilidad por saltos se ve impactada de manera que su estimación más que se triplica al considerar también los niveles de frecuencia más bajos, correspondientes a horizontes de inversión que van desde minutos hasta 1 a 2 horas de Trading, que también destaca el tiempo que tarda el efecto de las noticias en diluirse en el mercado de valores.

Palabras clave: Análisis de salto multiescala; Análisis de volatilidade; Datos financieros de alta frecuencia; Descomposición wavelet; Bolsa de valores brasileña; Serie temporal financiera; Enseñando finanzas.

1. Introdução

O estudo e previsão da volatilidade de ativos financeiros é parte essencial da gestão de riscos de carteira, além de ser utilizada em alocação de portfólio e precificação de ativos ou derivativos financeiros. A literatura focada nestes estudos tem assumido cada vez mais a importância em se considerar sua componente descontínua, conhecida como componente de salto. Um dos trabalhos seminais (Andersen et al., 2007), evidenciou a importância desta componente e a melhora na previsão da volatilidade ao separar a componente contínua daquela devida aos saltos, de forma que a Variação Quadrática (medida natural da variabilidade do processo de preço) é decomposta em Variância Integrada e Variação de Salto.

Chama-se de salto uma observação anormalmente grande em termos de uma magnitude que dependerá basicamente da volatilidade do processo da geração de dados, por isto pode ser entendido como uma grande mudança estrutural local na série de preços. Eles representam as incertezas inerentes ao mercado financeiro e, portanto, sua previsão é bastante complicada, já que refletem a chegada de notícias impactantes ou negociações de ordens de tamanho anormal.

Apesar de sua importância e da ampla discussão acerca do assunto, não há um consenso na literatura a respeito de como identificar e de qual a melhor forma de lidar com estes saltos. É comum associar a presença de saltos à anúncios de notícias macroeconômicas, mas também podem ser devido à falta de liquidez do mercado ou, ainda, como assume a literatura de finanças comportamentais, eles podem ser causados pela conduta de determinados participantes do mercado. Hanousek et al. (2012) enfatizam que, independentemente da crença em torno da origem dos saltos, mais importante que tentar prevêê-los, é preciso compreendê-los bem e estar pronto para reagir a eles de maneira adequada.

Diversas técnicas para detectar saltos podem ser empregadas. Uma delas é proveniente da decomposição da série de dados em vários níveis de detalhes, por meio da transformada de ondaletas, conforme demonstrado por Wang (1995). Não raro, apenas o primeiro nível de decomposição é considerado (Barunik et al., 2016; Barunik & Vacha, 2015), uma vez que se credita a ele a presença dos ruídos da série. No entanto, Wang (1995) e Fan e Wang (2007) sugerem que outros níveis da decomposição podem identificar saltos importantes que seriam desconsiderados quando utilizado apenas o nível mais fino. Em seu estudo empírico seminal, Wang (1995) utilizou dados mensais de retorno do mercado de ações dos Estados Unidos no período de 1953 a 1991. Os dois picos evidenciados foram devidos à recessão de 1974 e ao crash da bolsa de Nova York em 1987. A série amostrada foi decomposta em 9 níveis de detalhes e estes picos foram detectados nos níveis 6 e 7, respectivamente. Este resultado impulsiona uma análise mais detalhada para detectar saltos em outros níveis da decomposição além daquele de maior detalhe.

Na literatura brasileira, os estudos com foco na detecção e compreensão de saltos ainda são incipientes. Os trabalhos mais comuns são aqueles que comparam modelos para a volatilidade considerando, entre eles, algum modelo robusto à saltos, como por exemplo Variação Bipower (em inglês, *BiPower Variation* – BPV), desenvolvido por Barndorff-Nielsen e Shephard (2004), como é o caso dos trabalhos de Santos e Ziegelmann (2014) e Araújo Júnior (2020). Já Pinto (2021) comparou modelos de memória longa para dados de alta frequência com e sem ajustes de saltos, considerando para estes ajustes métodos de limiarização na decomposição em ondaletas, e obteve melhores previsões para as séries com ajustes de saltos nas diferentes aplicações utilizadas.

Com o objetivo de aprimorar a estimação da Variação de Salto do processo de preço (importante para compreensão da volatilidade do processo), o presente trabalho busca evidenciar a informação referente aos saltos contida nos diversos níveis de decomposição e sua contribuição para uma estimação mais precisa da Variação de Salto, utilizando o limite universal para detectar a localização de saltos e estimação de seus tamanhos em cada um dos níveis. Como os diferentes níveis referem-se a horizontes de investimento específicos, esta compreensão acerca do salto em cada um deles favorece a tomada de decisão por parte dos *traders* no dia a dia do mercado de ações. Para isto, um estudo empírico com dados reais foi realizado a partir de uma importante série de preços da bolsa de valores brasileira, as ações da Petrobrás. A escolha deste ativo se deu a partir da motivação em se investigar os saltos, dado que o mesmo sofreu uma forte queda nos preços devido à uma interferência externa ao mercado.

Na próxima seção está descrita a metodologia de localização de saltos a partir do limite universal aplicado nos diferentes níveis da decomposição de ondaletas do processo de log-preço, além do estimador da Variação de Salto em cada nível. Em seguida, na seção 3, são apresentados os resultados da aplicação da metodologia expandida para os diversos níveis na série de preços da PETR4. Por fim, conclui-se o trabalho com uma discussão sobre os principais ganhos obtidos com esta aplicação.

2. Análise de Saltos

No processo de difusão de salto em tempo contínuo tradicionalmente utilizado na precificação de ativos, o componente de difusão captura a variação suave do processo de preços, enquanto o componente de salto lida com as raras e grandes discontinuidades nos preços observados (Laurent, 2018). Andersen et al., (2007) citam diversos trabalhos que evidenciam que este é um modelo realista para a série de preços de muitos ativos financeiros.

2.1 Decomposição da Variação Quadrática

Considerando p_t o logaritmo do preço de um ativo financeiro, no tempo t , o processo de difusão de salto em tempo contínuo é dado pela equação diferencial estocástica (1)

$$dp_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t + \xi_t dq_t, \quad (1)$$

em que W_t é um processo de movimento Browniano padrão, μ_t e σ_t são processos previsíveis, μ_t é de variação finita, enquanto σ_t é estritamente positivo e de quadrado integrável, de forma que μ_t e σ_t representam a média e a volatilidade condicional instantânea do retorno. O termo mais à direita, que será denotado por J_t a partir daqui, diferencia o processo com difusão de salto do processo de difusão em tempo contínuo convencional, uma vez que representa o componente de salto através de q_t , que é um processo de Poisson não correlacionado com W e governado pela intensidade de salto λ_t , ou seja, $Prob(dq_t = 1) = \lambda_t dt$, com λ_t positivo e finito. Essa suposição implica uma restrição comum na literatura de finanças de que só pode haver um número finito de saltos no caminho do preço por período de tempo. O fator de escala ξ_t denota a magnitude do salto no processo de log-preços caso ocorra de fato um salto no tempo t .

Seguindo a convenção usual de que um intervalo $[t - h, t]$, para $0 \leq h \leq t \leq T$, representa a unidade de comprimento dentro de um dia e $t = 1, 2, \dots, T$ representa cada dia da amostra, então $r_{t-h+\frac{i}{N}h}$ representa o i -ésimo retorno intradiário no intervalo $[t - h, t]$, para $0 \leq h \leq t \leq T$, dado por

$$r_{t-h+\frac{i}{N}h} = p_{t-h+\frac{i}{N}h} - p_{t-h+\frac{(i-1)}{N}h}, \quad (2)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$, onde N é o total de observações no intervalo $[t - h, t]$. É usual tomar $h = 1$, de modo a conduzir a análise no horizonte de um dia. Neste caso, N é o número de observações intradiárias.

O retorno continuamente composto ao longo do intervalo de tempo $[t - h, t]$, para $0 \leq h \leq t$, é dado por

$$r_{t,h} = r_t - r_{t-h} = \int_{t-h}^t \mu_s ds + \int_{t-h}^t \sigma_s dW_s + \sum_{t-h \leq t_i \leq t} J_i. \quad (3)$$

Neste caso, o processo de variação do retorno quadrático (chamada simplesmente de Variação Quadrática) ao longo do intervalo $[t - h, t]$, para $0 \leq h \leq t \leq T$, é dado pela soma da variância integrada difusiva e dos saltos quadrados acumulados:

$$QV_{t,h} = \underbrace{\int_{t-h}^t \sigma_s^2 ds}_{IV_{t,h}} + \underbrace{\sum_{t-h \leq t_i \leq t} J_i^2}_{JV_{t,h}}. \quad (4)$$

A variação quadrática $QV_{t,h}$ associada ao processo de preço p_t é uma medida natural da variabilidade do processo de preço (Andersen et al., 2001; Barndorff-Nielsen & Shephard, 2002) e é naturalmente decomposta em duas partes: a variância integrada do processo de preço latente e a variação de salto (usualmente, e também neste trabalho, denotados por $IV_{t,h}$ e $JV_{t,h}$, do inglês *Integrated Variance* e *Jump Variation*, respectivamente).

Nota-se que as inovações no componente μ_t não afetam a variação do caminho da amostra do retorno, uma vez que a média é de ordem inferior em termos de propriedades de segunda ordem das inovações difusivas de $\sigma_t dW_t$. Desta forma, quando acumulados em muitos retornos de alta frequência em um curto intervalo de tempo de comprimento h , eles podem ser efetivamente desprezados (Andersen & Teräsvirta, 2009).

Um simples estimador consistente da variação quadrática global sob a suposição de não contaminação de ruído no processo de preço é fornecido pela conhecida variância realizada, ou volatilidade realizada (RV), introduzida por Andersen e Bollerslev (1998). A RV se popularizou devido a sua simplicidade e é um estimador que converge em probabilidade para a variação quadrática, ou seja, converge para $IV_{t,h} + JV_{t,h}$, quando $N \rightarrow \infty$. Em virtude disto, a estimativa da RV possui viés induzido pelos saltos de preços, o que sugere que alguma forma de lidar com os saltos é necessária para se obter uma boa estimativa da variação quadrática.

2.2 Decomposição da Variação Quadrática via Ondaletas

De maneira simplificada, pode-se pensar em ondaletas como funções matemáticas que formam uma base para representar funções pertencentes a determinados espaços, com uma propriedade importante que é a capacidade de aproximar localmente as variáveis no tempo ou espaço, já que podem ser manipuladas convenientemente, sendo "esticadas" ou "comprimadas" de modo a reproduzir a série em estudo (Crowley, 2007). Para isto, é utilizada uma determinada transformada de ondaletas, que pode ser compreendida como uma ferramenta de análise que possibilita representar a série original em componentes de tempo e frequência, a partir da decomposição da série original. Ou seja, as séries temporais podem, portanto,

ser decompostas através de uma sequência de projeções de ondaletas denominadas ondaleta-mãe (que representam as partes detalhadas por escala, referente à alta frequência da série de dados) e ondaleta-pai (que representa essencialmente a parte de tendência suave, baixa frequência da série), através de uma transformada de ondaletas.

A utilização da transformada de ondaletas contínua CWT possibilita a obtenção de uma derivação do comportamento teórico no espaço tempo-escala (Barunik & Vacha, 2015). No entanto, é necessária alguma forma de discretização para o cálculo dos estimadores quando se trabalha com dados reais. Neste caso, esta discretização será realizada através da transformada de ondaleta discreta de sobreposição máxima (MODWT – do inglês *Maximal Overlap Discrete Wavelets Transform*). Uma das vantagens em se trabalhar com a MODWT é que, ao contrário da transformada de ondaleta decimada, ela não necessita de uma amostra diádica (ou seja, de comprimento equivalente à uma potência de 2), possibilitando o uso de toda a amostra disponível. Além disso, ela também não utiliza o procedimento de decimação, que a cada nível reduz pela metade a quantidade de coeficientes, de forma que, tanto os vetores de ondaletas, quanto os coeficientes de escala tem comprimento igual em todas as escalas¹. Como neste trabalho todos os níveis de escala foram utilizados para a investigação dos saltos, esta propriedade torna-se essencial.

A transformada de ondaleta contínua (CWT) surge então de maneira que se torna possível reescrever a equação (4), que decompõe a $QV_{t,h}$ em sua parte integrada $IV_{t,h}$ e de salto $JV_{t,h}$, de forma que permite definir um modelo livre de medida da variação integrada em analogia ao estimador de variância realizada original:

$$QV_{t,h} = \underbrace{\frac{2}{C_\psi} \int_{t-h}^t \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(s) \langle \psi_{j,k}, \sigma_s^2 \rangle dk \frac{1}{j^2} dj ds}_{IV_{t,h}} + \underbrace{\sum_{t-h \leq i \leq t} J_i^2}_{JV_{t,h}} \quad (5)$$

Como a CWT é dada pelo produto interno entre as dilatações e contrações da ondaleta-mãe ψ , dadas por $\psi_{j,k}$, e a volatilidade condicional instantânea do retorno (σ_s), definida como $\langle \psi_{j,k}, \sigma_s^2 \rangle = |j|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\left(\frac{s-k}{j}\right)} \sigma_s^2(s) ds$, temos que, juntamente com as dilatações e contrações da ondaleta-pai (ou função escala), ϕ , a partir do conjunto $\{\phi_{j_n,k}(t), \psi_{j,k}(t); j, k \in \mathbb{Z}, j \geq j_0\}$, é possível escrever uma função $f(t)$ (ou um sinal, ou uma série) do espaço $L^2(\mathbb{R})$ como $f(t) = \sum_k c_{j_n,k} \phi_{j_n,k} + \sum_{j \geq j_n} d_{j,k} \psi_{j,k}$. A partir desta decomposição da série de dados de interesse, estes coeficientes de ondaletas $d_{j,k}$ são utilizados para a análise de saltos².

Há uma variedade de ondaletas, com diferentes formatos e características que justificam suas aplicações para a decomposição das séries de dados. O exemplo mais antigo de ondaleta e que será utilizado neste trabalho é a função de Haar, cujas principais vantagens são sua simplicidade, uma vez que possui forma fechada, além do fato de ser ortogonal.

Diferentemente da expressão (4), a equação (5) decompõe a variação quadrática tanto no tempo quanto na frequência. Esta decomposição no domínio da frequência resulta em j componentes que representam escalas, que podem ter uma interpretação econômica como horizontes de investimento, conforme Crowley (2007). Estes diferentes horizontes são importantes na prática diária dos *traders*, pois podem ser investigados para diferentes estratégias, por exemplo para um mesmo dia (em minutos ou horas) ou até mesmo para um período que compreende vários dias (como semanas, meses e até anos).

¹ Para mais detalhes, consultar Gençay et al. (2001), Percival e Walden (2000) e In e Kim (2012).

² Maiores detalhes das equações de ondaletas mãe e pai, ver Morettin (2014).

2.3 Estimação da Variação de Salto

Para estimar a Variação de Salto através da abordagem de ondaletas, foi utilizada a ideia inicial de Fan e Wang (2007) que visa distinguir entre a parte contínua e a parte de saltos do processo de preço estocástico com ruído aditivo independente e identicamente distribuído. Para isto, assume-se que o caminho da amostra do processo de preço terá um número finito de saltos, como visto anteriormente. Fan e Wang (2007) utilizam a transformada de ondaletas discreta (DWT) e, aqui neste trabalho, será utilizada a extensão proposta por Barunik et al. (2016), que considera a MODWT.

Considere a transformada de ondaletas da série de log-preços (ou simplesmente, preços). Fan e Wang (2007) afirmam que para frequências mais altas desta transformada, o processo de preço domina o ruído apenas próximo de um local de salto, do contrário é muito pequeno (ou seja, o ruído é relativamente pequeno e a dominância do preço é devido ao salto). Para detectar a parte dominante do processo, o limite universal (*universal threshold*) de Donoho e Johnstone (1994) é o mais comumente utilizado na literatura, e portanto foi aplicado também neste trabalho.

A partir dos filtros de escala e de ondaleta MODWT (Gençay et al., 2001), o cálculo dos coeficientes de escala e de ondaleta ($d_{j,k}$) são obtidos via algoritmo piramidal (Percival e Walden, 2000) para a série de preços ou log-preços $y_{t-h+\frac{i}{N}h}$, para $i = 1, 2, \dots, N$, no intervalo $[t-h, t]$. Desta forma, os coeficientes $d_{j,k}$ são obtidos para cada nível j da decomposição, em que $J^m \leq \log_2 N$ é o nível máximo de decomposição para a série estudada.

Como foi utilizada a MODWT, existem N coeficientes de ondaletas em cada nível, que corresponde ao número de observações intradiárias. Assim, para cada nível j fixado, a identificação do salto é feita quando o valor absoluto dos coeficientes de ondaleta no respectivo nível é maior que o limite universal D_τ , ou seja, se $|d_{j,k}| > D_\tau$, para cada valor de k , $k = 1, \dots, N$, para cada dia $t = 1, 2, \dots, T$, onde o limite D_τ é dado por

$$D_\tau = d_\tau \sqrt{2 \log N}, \text{ com } d_\tau = \sqrt{2} \text{Mediana}\{|d_{j,k}|\} / 0,6745, \quad k = 1, \dots, N. \quad (6)$$

O fator $\sqrt{2}$ em d_τ não aparece no original de Fan e Wang (2007). Barunik et al. (2016) o introduz como um fator de correção devido ao uso da MODWT.

Quando há a presença de salto, a localização de salto é estimada por $\hat{\tau}_t = \{k\}$, com tamanho $\Delta_k J_t$ estimado como

$$\Delta_k J_t = \left(y_{t-h+\frac{k}{N}h} - y_{t-h+\frac{k-1}{N}h} \right) \mathbb{I}_{\{|d_{j,k}| > D_\tau\}}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Neste caso, o tamanho do salto está sendo estimado especificamente pelo retorno. Ou seja, não se considera informações do preço à frente do salto localizado, apenas a imediatamente anterior. A Variação de Salto $JV_{t,h}$ sobre o intervalo $[t-h, t]$ no tempo discreto é estimada, portanto, como a soma dos quadrados de todos os tamanhos de salto estimados

$$\widehat{JV}_{t,h} = \sum_{k=1}^N (\Delta_k J_t)^2. \quad (8)$$

O estimador dado em (8) é um estimador consistente da variação de salto do processo, ou seja, $\widehat{JV}_{t,h} \xrightarrow{p} JV_{t,h}$ (Barunik et al., 2016).

Seguindo a metodologia de Barunik et al. (2016), após detectar precisamente os saltos, é possível obter um processo ajustado aos saltos ao se subtrair os saltos intradiários do processo a partir da série de retornos da seguinte forma

$$\Delta_k y_t^{(J)} = \Delta_k y_t - \Delta_k J_t. \quad (9)$$

em que, $\Delta_k y_t = y_{t-h+\frac{k}{N}h} - y_{t-h+\frac{k-1}{N}h}$ é o k -ésimo retorno no intervalo $[t-h, t]$, para $k = 1, \dots, N$.

De (7) e (9), conclui-se que os dados ajustados aos saltos a partir da série de retornos são dados por

$$\Delta_k y_t^{(j)} = \begin{cases} \Delta_k y_t, & \text{se não apresenta salto em } k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (10)$$

O processo ajustado aos saltos $y_{t,h}^{(j)}$ converge em probabilidade para a parte contínua sem saltos da variação quadrática, ou seja, para a variância integrada do processo e pode ser utilizado então para estimação e previsão da volatilidade.

Conforme discutido anteriormente, é comum utilizar apenas o(s) primeiro(s) nível(is) de decomposição para detecção de saltos. Com o objetivo de expandir a análise para os demais níveis da decomposição e de verificar a contribuição dos saltos detectados para a composição da Variação de Salto estimada $\widehat{V}_{t,h}$, a metodologia discutida será aplicada em diversos níveis j da decomposição de ondaletas MODWT. Fan e Wang (2007) sugere um nível limite para ser explorado ao afirmar que, em níveis de alta resolução j_n com $2^{j_n} \sim n/\log^2 n$, os coeficientes de ondaletas são significativamente maiores do que os outros próximo aos locais de salto do processo de log-preço³. Isto é concordante com o fato de que, em níveis de baixa resolução, as informações obtidas são mais relacionadas à tendência da série.

As análises e gráficos presentes neste trabalho foram realizados no *software* livre R (R Core Team, 2020).

3. Aplicação Empírica: Variação de Salto para uma Série de Preços Real

Para a aplicação da localização de saltos nos diversos níveis de decomposição foi utilizada a série de preços da PETR4 - Petrobrás (Petróleo Brasileiro S/A). A escolha deste ativo se deu devido à sua alta liquidez, alta participação e influência sobre o Ibovespa (principal indicador de desempenho das ações negociadas na bolsa de valores brasileira, que reúne as empresas mais importantes do mercado de capitais brasileiro). Outro fato que motivou a escolha deste ativo se deu a partir do objetivo de explorar a identificação de saltos de preços: a empresa passou por um período evidente de queda nos preços em fevereiro de 2021, devido ao anúncio da troca da presidência da mesma feita pelo então presidente do país. A notícia impactou não apenas o próprio ativo da Petrobrás, como também o Ibovespa, o que resultou em um grande salto no dia imediato e nos posteriores ao anúncio.

3.1 Descrição dos dados

Os dados foram coletados via MetaTrader 5 no período correspondente à 04/01/2021 à 25/06/2021. A frequência utilizada foi de 1 minuto, já que ruídos, como a presença de saltos na série, tendem a ser maiores em alta frequência. A utilização de amostras maiores em uma frequência tão alta teria um alto impacto no número de níveis a serem analisados e, portanto, ficará a cargo de uma análise futura.

Diversos autores discutem as vantagens em se desconsiderar os dados provenientes dos minutos iniciais à abertura do mercado, uma vez que existe uma grande influência do preço overnight e do leilão de abertura. Rydberg e Shephard (2003) por exemplo, a fim de evitar os efeitos do leilão de abertura, desconsideraram os 15 minutos iniciais. Para o caso estudado, a amostragem foi iniciada a partir das 10h20, desconsiderando os primeiros 19 minutos, após analisar uma alta taxa de dados faltantes, bem como de outliers no período suprimido.

Além disso, uma questão importante referente aos dados se dá pelo fato de que a bolsa de valores brasileira tem seu horário de fechamento influenciado pelo da bolsa de valores americana, estendendo em 1 hora o horário de fechamento em determinados períodos do ano. Para fins de identificação dos saltos, não foi necessário desconsiderar tais observações.

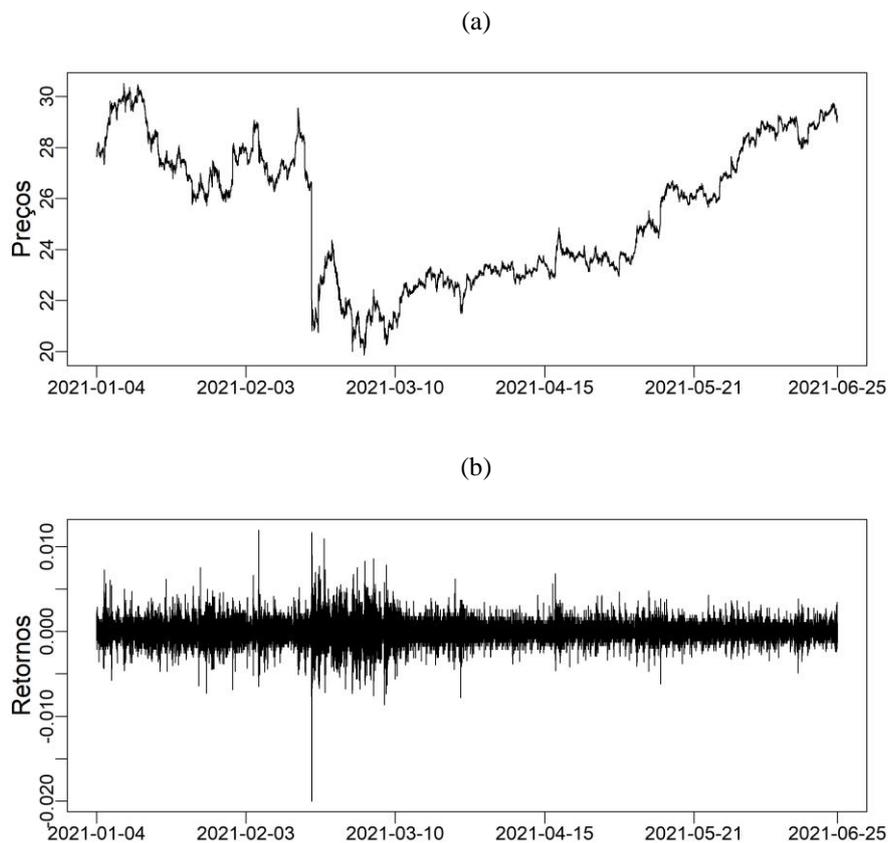
3.2 Decomposição em ondaletas MODWT

Na série amostrada, há um total de 119 dias resultando em 49611 observações, sendo que o número de observações

³Esta restrição de potência de dois é utilizada uma vez que os autores utilizam transformada decimada.

por dia pode variar de 285 (dia de Quarta-Feira de Cinzas, com meio expediente na bolsa de valores brasileira) à 455 (nos dias com horário de fechamento estendido). A Figura 1 apresenta o gráfico da série original com os preços praticados no período de coleta para a frequência de 1 minuto, além do gráfico da respectiva série de retornos. Estes gráficos evidenciam o período de queda que foi explorado neste trabalho ocorrido no dia 22/02/2021.

Figura 1. Gráfico da série de preços (a) e da série de retornos (b) para a PETR4 no período de 04/01/2021 a 25/06/2021 para a frequência de 1 minuto.



Fonte: Autores (2022).

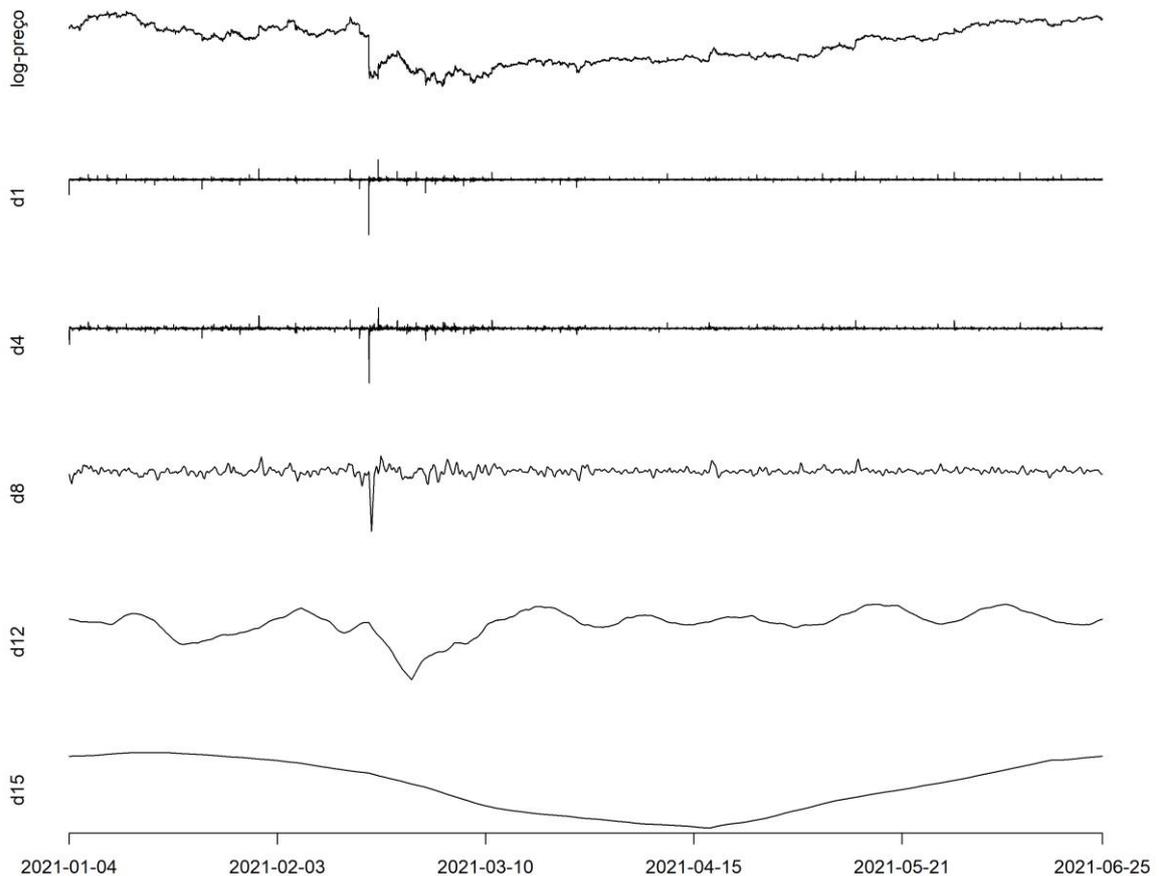
Para a aplicação da metodologia, a série de log-preços foi decomposta utilizando a transformada discreta MODWT, em 15 níveis de detalhes, que corresponde ao máximo de acordo com o comprimento da série estudada. Foi utilizada a ondaleta de Haar (Morettin, 2014), que é a mais simples e tem um bom desempenho neste tipo de aplicação. Os coeficientes dos níveis de decomposição d1, d4, d8, d12 e d15 estão apresentados na Figura 2, onde o efeito da queda do dia 22 de fevereiro é observado nos níveis de frequência mais alta (do nível d1 até o d8), enquanto os níveis de frequência baixa (d12 e d15) fornecem informações relacionadas ao comportamento de tendência da série no período estudado. A Tabela 1 fornece a relação entre os níveis de decomposição em uma transformada não decimada discreta para escalas de tempo apropriadas para a série de dados intradiários (Crowley, 2007). Esta relação entre o nível da decomposição e a escala temporal correspondente traz uma nova luz à compreensão e utilização dos saltos detectados a cada nível e garantem uma melhor interpretabilidade do que representam cada um destes níveis de decomposição para as aplicações na área de finanças, conforme será visto mais adiante.

Tabela 1. Relação entre nível de decomposição e Escala de tempo.

Nível	Escala de tempo
d1	1 - 2 minutos de negociação
d2	2 - 4 minutos de negociação
d3	4 - 8 minutos de negociação
d4	8 - 16 minutos de negociação
d5	16 - 32 minutos de negociação
d6	32 - 64 minutos de negociação
d7	≈ 1 - 2 horas de negociação
d8	≈ 2 - 4 horas de negociação
d9	≈ 4 - 8 horas de negociação
d10	≈ 1 - 2 dias de negociação
d11	≈ 2 - 4 dias de negociação
d12	≈ 4 - 8 dias de negociação
d13	≈ 8 - 17 dias de negociação
d14	≈ 17 - 34 dias de negociação
d15	≈ 34 - 68 dias de negociação

Fonte: Autores (2022).

Figura 2. Gráficos da série original e dos coeficientes de ondaletas para alguns níveis da decomposição.



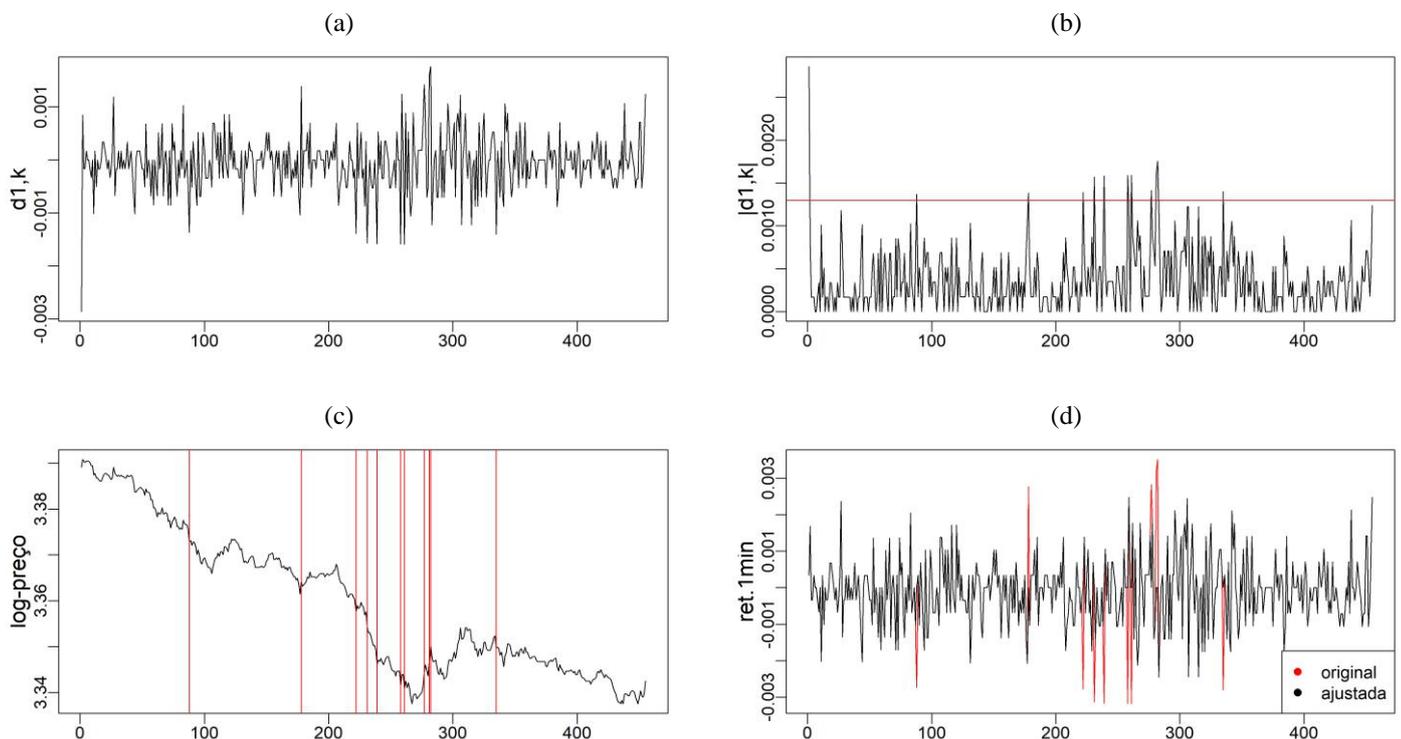
Fonte: Autores (2022).

3.3 Localização de salto nos diversos níveis de decomposição de ondaletas

Na seção 2.2, foi discutido que a detecção de saltos pode ser feita através do limite universal (universal threshold) apresentado na expressão (6), de forma que a localização dos saltos é dada a partir da localização dos coeficientes de ondaletas que superam tal limite. A Figura 3 ilustra o processo para o primeiro nível de decomposição: a imagem (a) apresenta a série de coeficientes de ondaletas no primeiro nível da decomposição da série de log-preços para o dia 13/01/2021, que foi um dos dias com o maior número de saltos detectados; na imagem (b), toma-se o valor absoluto destes coeficientes e identifica-se quais valores excedem o limite universal (em vermelho) fornecendo a localização dos saltos. A localização destes valores são, portanto, os locais de salto detectados que estão destacadas no gráfico da série de log-preço apresentada em (c). Para este dia específico, observou-se 11 saltos, precisamente às 10h20, 11h47, 13h17, 14h01, 14h10, 14h18, 14h37, 14h40, 14h56, 15h, 15h54.

Uma vez encontrada a localização dos saltos para cada dia amostrado, o passo seguinte é calcular o tamanho dos saltos identificados, a fim de estimar a Variação de Salto dada pela expressão (8) e, assim, obter uma nova série dada pelos retornos ajustados aos saltos localizados a partir do primeiro nível da decomposição, conforme expressão (9). A série de retornos e a série de retornos ajustados aos saltos detectados neste primeiro nível para o dia 13/01/2021 apresenta-se em (d).

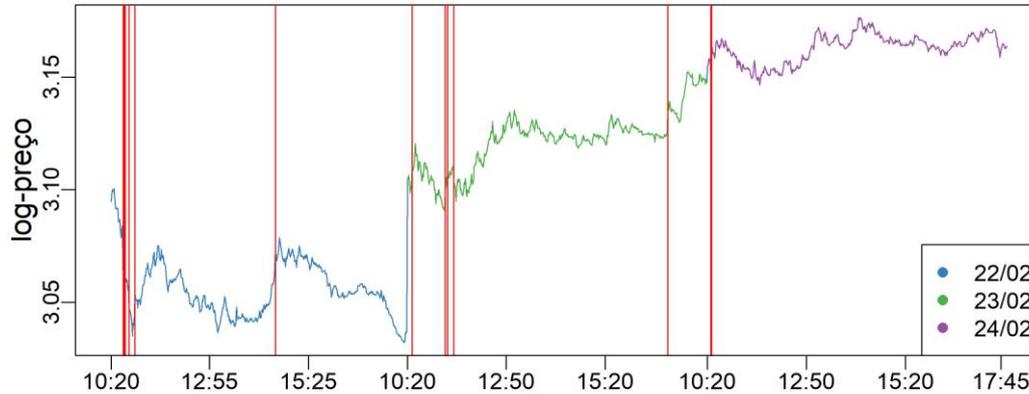
Figura 3. Exemplificação do processo de localização de saltos para o dia 13/01/2021, com 11 saltos. (a) Gráfico dos coeficientes de ondaletas referente ao primeiro nível de decomposição. (b) Gráfico dos valores absolutos dos coeficientes de ondaletas com o limite universal em vermelho indicando as observações que representam salto. (c) Gráfico da série de log-preço com os respectivos locais de salto detectados. (d) Gráfico do retorno original e do retorno ajustado aos saltos localizados.



Fonte: Autores (2022).

Uma investigação acerca da semana do dia 22 de fevereiro foi realizada considerando este primeiro nível de decomposição. As Figuras 4 (a), (b) e (c) mostram as séries de log-preço dos dias 22, 23 e 24 de fevereiro de 2021, com os respectivos saltos detectados. Os dias 25 e 26 não apresentaram saltos neste nível.

Figura 4. Gráficos da série de log-preços com as localizações dos saltos detectados no primeiro nível de decomposição para os dias 22 (a), 23 (b) e 24 (c) de maio de 2021, com 6, 5 e 2 saltos respectivamente. O gráfico (d) apresenta os 3 dias consecutivos com os respectivos saltos.



Fonte: Autores (2022).

É importante destacar a maior presença de saltos especialmente no primeiro dia após o anúncio (da mudança da presidência da estatal) e nas primeiras horas deste dia, confirmando que os saltos aparecem devido a este comportamento mais reativo do mercado. No entanto, também se nota que os saltos vão diminuindo ao longo do tempo e dos dias, conforme o mercado vai se recuperando do efeito da notícia.

De maneira análoga ao que foi realizado para o primeiro nível de decomposição, a localização de saltos foi realizada também para os demais níveis. A ideia é identificar os saltos que aparecem até o nível $j_{max} = 8$, no entanto, como o objetivo é explorar a presença de saltos nos diversos níveis, optou-se por avaliar também os níveis posteriores. Na Tabela 2 estão apresentados, para cada nível, a quantidade de saltos detectadas por dia e quantos (dos 119 dias amostrados) apresentaram aquela quantidade de saltos. É importante observar que, à medida que se caminha para frequências mais baixas, mesmo nos níveis 5 e 6, por exemplo, começa-se a detectar um grande volume de saltos num único dia, que pode estar relacionado mais com uma tendência do mercado do que com um salto em si.

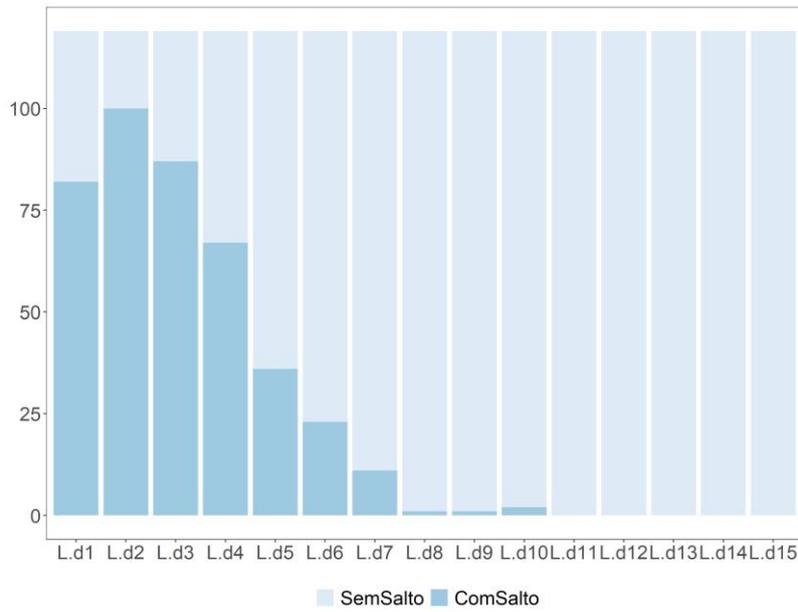
Como o limite de Donoho e Johnstone é fixado para o horizonte escolhido de 1 dia, a primeira comparação que pode ser feita para os saltos localizados nos diferentes níveis é observar a proporção de dias que apresentaram salto, independentemente de quantos saltos foram detectados por dia. A partir da Figura 5, nota-se que, à medida que níveis mais suaves são explorados, o número de dias que apresentam saltos diminui. No entanto, conforme Tabela 2, para estes níveis de menor frequência, nos dias em que se verificou a presença de saltos, eles eram em maior número. Por exemplo, no nível d7 um único dia apresentou 79 saltos e no nível d10, 56. Desta forma, é importante salientar que mais dias sem salto não indica, necessariamente, menos saltos, uma vez que se pode observar em um único dia uma quantidade maior de saltos (ver Tabela 2).

Tabela 2. Relação do número de saltos encontrados por dia e do número de dias que o apresentaram para cada nível de decomposição.

Nível	Quantidade de saltos/Quantidade de dias																					
d1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	11												
	37	29	23	9	6	7	2	1	2	3												
d2	0	1	2	3	4	5	6	7	9	11												
	19	18	42	16	10	5	4	3	1	1												
d3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	15	16	17						
	32	7	12	11	16	16	11	2	3	2	1	2	1	1	1	1						
d4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	18	19	22				
	52	4	5	7	5	8	4	5	1	5	5	2	8	1	4	1	1	1				
d5	0	1	4	5	6	7	8	10	11	13	14	15	16	17	18	19	20	21	23	25	33	38
	83	3	1	1	1	1	2	1	3	2	3	2	2	1	1	3	1	4	1	1	1	1
d6	0	3	5	9	11	12	15	19	23	24	25	27	28	29	31	32	34	42	49			
	96	1	1	1	1	3	2	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1			
d7	0	1	11	14	18	23	26	35	70	71	73	79										
	108	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1										
d8	0	39																				
	118	1																				
d9	0	25																				
	118	1																				
d10	0	50	56																			
	117	1	1																			
d11,																						
d12,	0																					
d13,	119																					
d14,																						
d15																						

Fonte: Autores (2022).

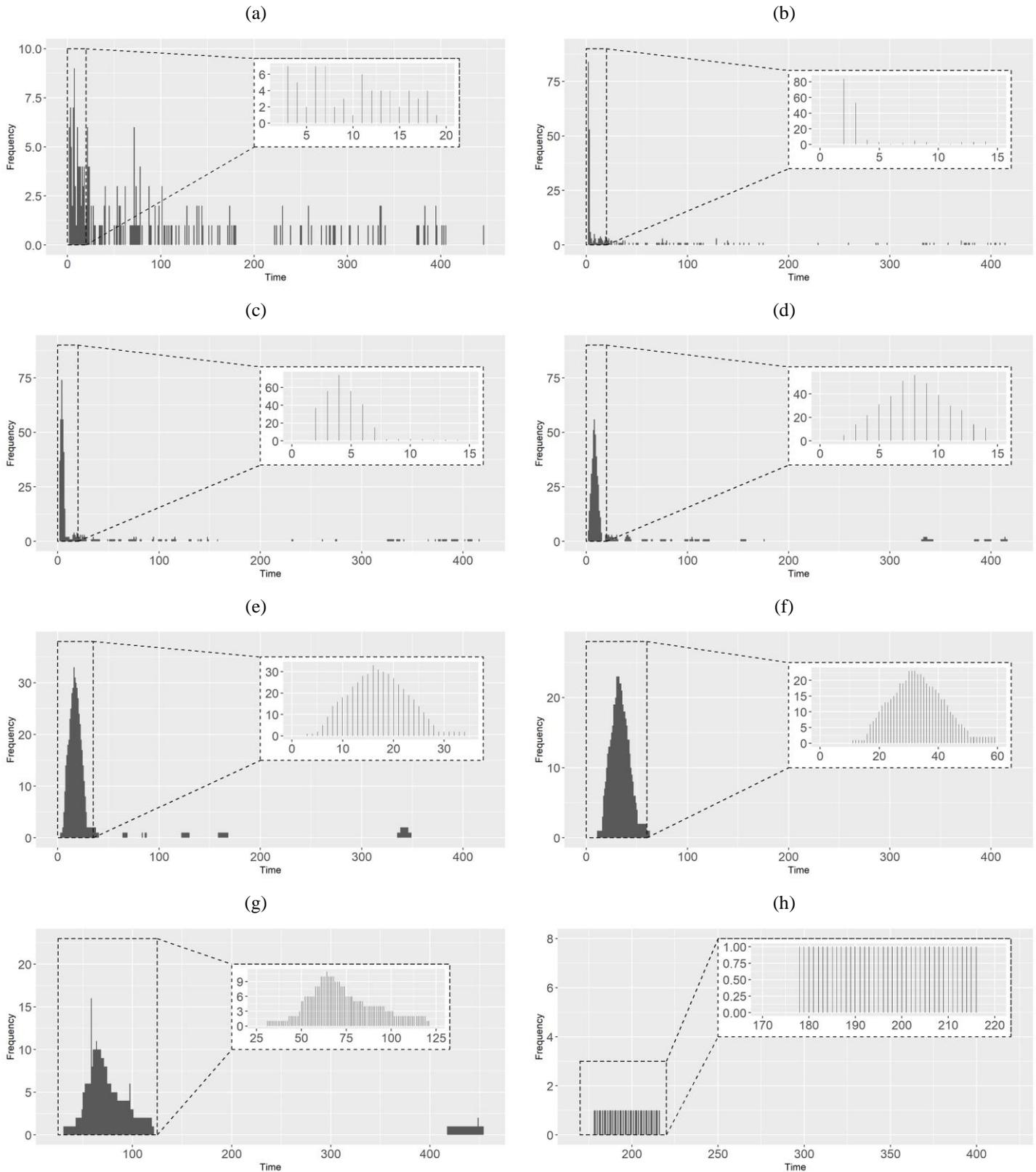
Figura 5. Proporção de dias com e sem salto para cada nível da decomposição.



Fonte: Autores (2022).

No período investigado, foi possível evidenciar que, para cada nível de decomposição, a maior quantidade de saltos é detectada na escala de tempo equivalente (ver Tabela 1), conforme é possível confirmar nos histogramas da Figura 6. Esta observação enfatiza a necessidade de se analisar nível a nível os saltos detectados, já que em cada um deles é possível focalizar na frequência escolhida.

Figura 6. Gráficos dos histogramas das localizações de salto detectados nos níveis d1 a d8 com destaques amplificados para a região de maior frequência dos saltos localizados para a escala correspondente (ver Tabela 1).



Fonte: Autores (2022).

Para a construção destes histogramas, retirou-se da amostra as observações correspondentes ao dia de Quarta-Feira de

Cinzas, uma vez que para ele o expediente começa às 13h, de forma que as observações iniciais e finais não correspondem ao mesmo instante de tempo dos demais dias. Além disso, em todos os níveis foram desconsiderados os saltos detectados na posição 1, pois eles refletem o efeito overnight, além de impossibilitar a estimação do tamanho do salto e do ajuste dos dados aos saltos.

3.4 Comparação da Variação de Salto estimada para os diversos níveis

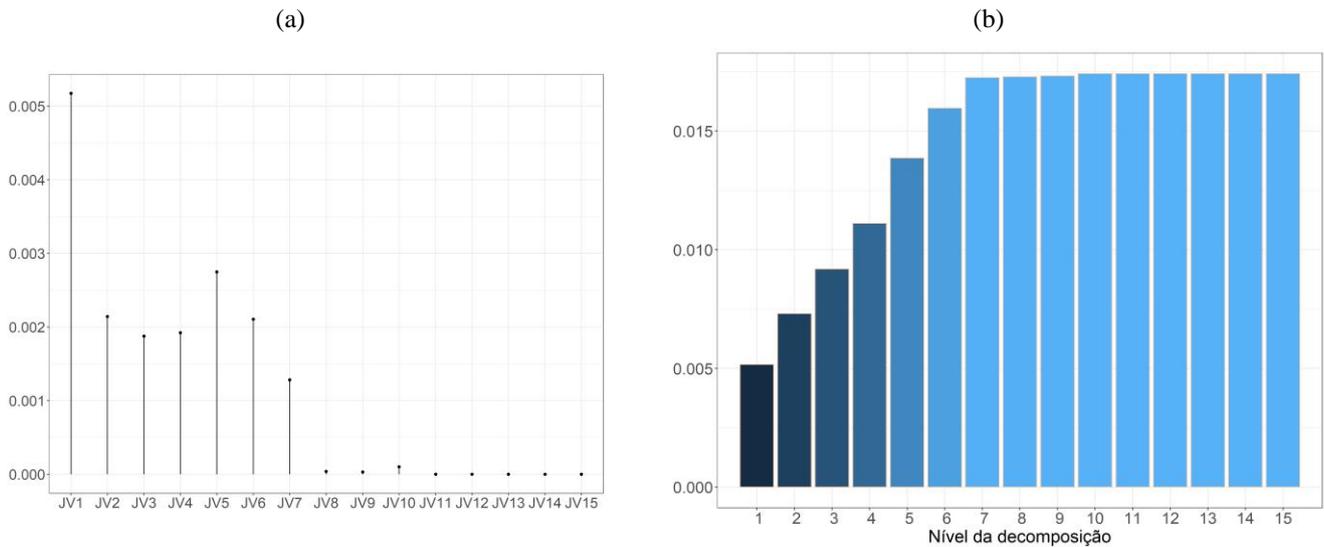
Partindo para a análise da Variação de Salto, na qual é possível observar a contribuição dos saltos detectados em todos os níveis para a composição de toda a JV Estimada. A variação de salto JV de cada nível foi estimada segundo a expressão (8) e vai fornecer a variabilidade devida a saltos detectada em cada nível da decomposição para a série de log-preços da PETR4. A Figura 7 (a) mostra o valor estimado da Variação de Salto em cada nível, onde é possível observar que de fato o primeiro nível é o que apresenta maior JV. No entanto, ao analisar a Figura 7 (b), que fornece a variação de salto acumulada a cada nível, e com o auxílio da Tabela 3, que apresenta os valores estimados e acumulados da JV, notou-se que, até chegar ao nível d8 (suposto j_{max}), esta variação de salto mais que triplica, passando de $5,2 \times 10^{-3}$ para $17,3 \times 10^{-3}$. Estes resultados evidenciam a necessidade de se considerar os saltos detectados nos diversos níveis da decomposição ao se estimar a Variação Quadrática.

Tabela 3. Valores da variação de salto estimada e acumulada a cada nível da decomposição da série de log-preço.

Nível	JV Estimada	JV Acumulada
d1	0,005171998	0,005171998
d2	0,00214225	0,007314248
d3	0,001875432	0,009189680
d4	0,001921493	0,011111173
d5	0,002747892	0,013859065
d6	0,002104943	0,015964007
d7	0,001282572	0,017246579
d8	3,943001e-05	0,017286009
d9	3,151632e-05	0,017317525
d10	9,941173e-05	0,017416937
d11	0	0,017416937
d12	0	0,017416937
d13	0	0,017416937
d14	0	0,017416937
d15	0	0,017416937

Fonte: Autores (2022).

Figura 7. Gráficos referentes à variação de salto nível a nível da decomposição: (a) Valor estimado; (b) Valor acumulado.



Fonte: Autores (2022).

3.4.1 Semana de 22 a 26 de fevereiro

A fim de elucidar acerca da aplicação da detecção de saltos nos diferentes horizontes de investimento, representados aqui pelos níveis da decomposição, observou-se o comportamento na semana de 22 a 26 de fevereiro de 2021, após a intervenção do então presidente do país na presidência da Petrobrás. O anúncio referido foi feito no final de semana, e o maior impacto no comportamento dos investidores foi na segunda-feira, diminuindo a quantidade de saltos ao longo da semana, conforme a Tabela 4.

Tabela 4. Número de saltos detectados nos dias da semana de 22 a 26 de fevereiro de 2021.

Nível	22/02/2021	23/02/2021	24/02/2021	25/02/2021	26/02/2021
d1	6	5	2	-	-
d2	5	5	3	2	1
d3	7	5	-	5	2
d4	16	14	-	4	1
d5	38	21	-	-	-
d6	49	34	-	-	-
d7	71	35	-	-	-

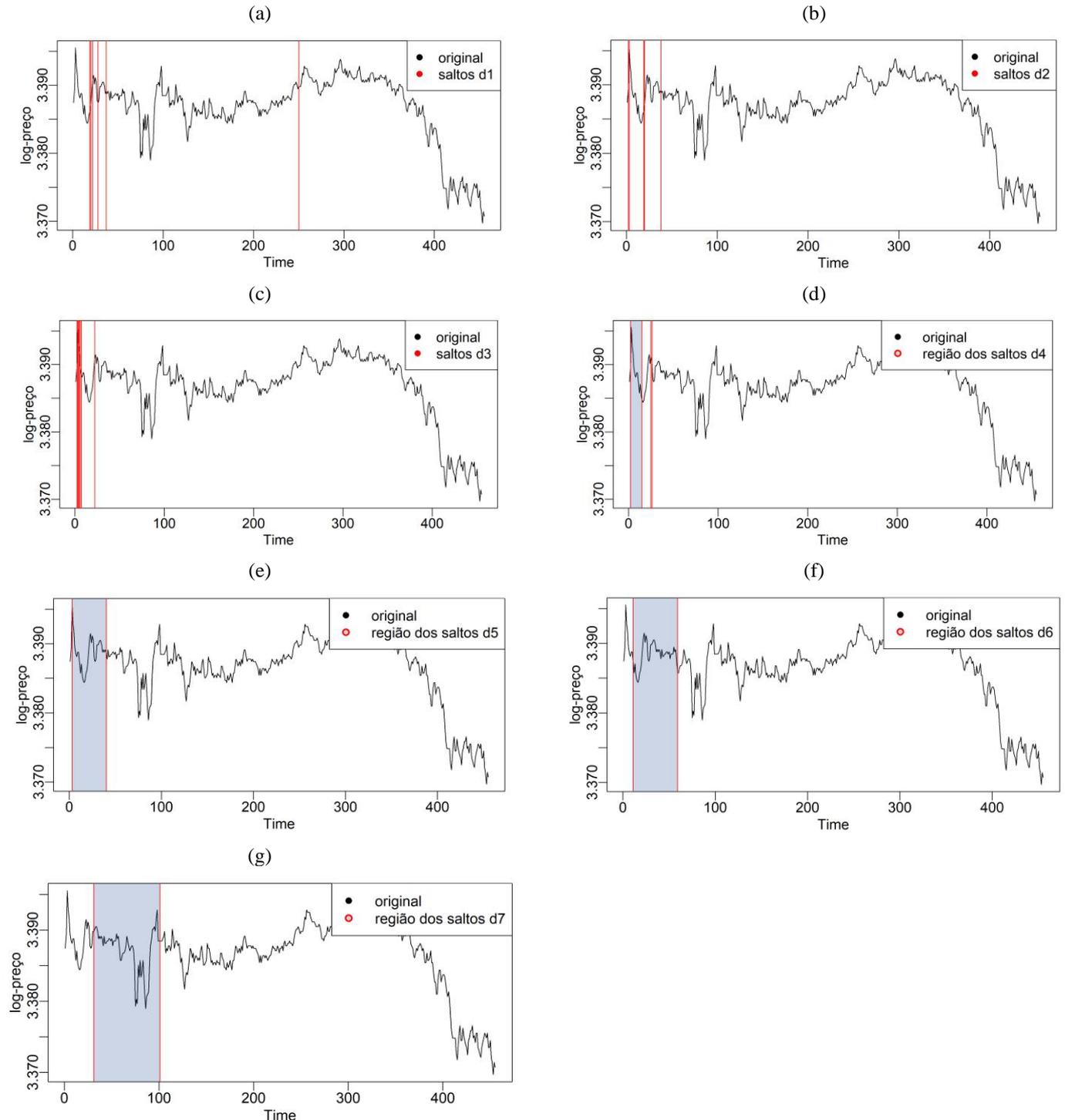
Fonte: Autores (2022).

A Figura 8 (a) apresenta o gráfico da série de log-preços para o dia de maior choque, 22/02/2021, a partir do anúncio da interferência na presidência da estatal, destacando os saltos localizados no primeiro nível (na Figura 8 (a)) até o sétimo nível (Figura 8 (g)). Com exceção do primeiro nível, que detectou um salto isolado no período da tarde (Figura 8 (a)), todos os demais níveis detectaram saltos nas primeiras duas horas de mercado. Além disso, nas frequências 4, 5, 6 e 7, são detectadas regiões (ou intervalos) de saltos, conforme sinalizado nas Figuras 8 (d), (e), (f) e (g) pelas regiões hachuradas em cinza com início e término do período de saltos detectados destacados em vermelho. Ou seja, nestas frequências não foram detectados saltos isolados, mas agrupamentos de saltos subsequentes minuto a minuto naquela escala/frequência. Somente após a 100ª observação, às 12h06, verificado na Figura 8 (g), referente ao nível 7 e à escala de 1 a 2 horas de negociação, a variabilidade

devido ao choque tende a se estabilizar e o comportamento reativo do mercado se dilui.

Para os demais dias da semana, o comportamento é semelhante ao apresentado na Figura 8, demonstrando que o efeito do choque da notícia se dilui ao longo do tempo, confirmado pela Tabela 4, com o número de saltos diminuindo com o passar dos dias (de 22 até 26) e com o passar das horas (da escala de 1-2 minutos para a de 1-2 horas).

Figura 8. Gráficos da série de log-preços para o dia 22/02/2021 com a identificação dos saltos localizados para os níveis d1 (a), d2 (b), d3 (c), d4 (d), d5 (e), d6 (f), d7 (g). Para os níveis d4 a d7, figuras (d) a (g), nota-se regiões (ou períodos) de salto, demarcados em vermelho pelo início e término do período referido, e o intervalo representado pela região hachurada em cinza.



Fonte: Autores (2022).

4. Considerações Finais

Apesar da dificuldade em se prever saltos nos processos de preços dos ativos financeiros, uma vez que eles refletem especialmente o comportamento dos *players* do mercado em reação a notícias macroeconômicas, a compreensão do seu comportamento é relevante para um melhor entendimento (e previsão) da dinâmica da volatilidade de ativos financeiros, expressada pela Variação Quadrática do retorno. A abordagem de ondaletas possibilitou a identificação destes saltos em diferentes horizontes de tempo/escala que podem auxiliar às tomadas de decisões e estratégias utilizadas pelos *traders*.

Através de uma aplicação a dados reais para um momento claro de queda dos preços das ações da Petrobrás, foi possível observar que os saltos são detectados principalmente nas diversas escalas de alta frequência, correspondentes a horizontes de investimento intradiários (que vão de minutos até algumas horas de negociação), até que seus efeitos sejam diluídos pelo mercado. A análise feita em particular para a semana da queda dos preços após a intervenção na presidência da estatal auxiliou a compreensão do comportamento dos saltos neste momento específico de crise. Saltos foram detectados até o nível 7, correspondente à escala de 1 a 2 horas de negociação, sendo que, em alguns níveis, foram detectados períodos de salto ao invés de saltos isolados, a partir da abertura do mercado até por volta das 12h. Este resultado reforça que, apesar do comportamento reativo do mercado às notícias macroeconômicas, este efeito tende a diluir no período de algumas horas. Mesmo que tenham sido detectados saltos nos dias subsequentes ao choque mais expressivo, do dia 22/02/2021, estes saltos foram em menor quantidade, além de também terem acompanhado este comportamento de serem mais frequentes nos momentos mais iniciais da abertura do mercado.

Com relação à Variação de Salto, como ela é parte da Variação Quadrática e, portanto, uma medida importante para a compreensão da variabilidade do processo de preço, foi visto que considerar diversos níveis da decomposição na sua estimação sugere uma maior precisão, uma vez que sua estimativa mais que triplica ao considerar até o nível d8, comparativamente se fosse utilizado apenas o nível mais fino. Além disso, o nível máximo sugerido por Fan e Wang (2007) parece fornecer um bom corte no número de níveis a serem explorados, já que apenas em um dos níveis acima (d10) foi observada detecção de salto, que pode estar mais relacionada à tendência do processo do que referente à algum salto propriamente dito.

Como trabalhos futuros, estudos complementares a partir dos dados ajustados aos saltos nos diferentes níveis podem ser realizados, comparando a volatilidade estimada pelo processo ao se considerar os dados com e sem ajustes aos saltos, através dos modelos de volatilidade realizada, como HAR e BPV, levando-se em conta um ou mais níveis da decomposição na detecção e eliminação dos saltos.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais (FAPEMIG).

Referências

- Andersen, T. G., & Bollerslev, T. (1998). Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts. *International Economic Review*, 39(4), 885–905. <https://doi.org/10.2307/2527343>
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., & Diebold, F. X. (2007). Roughing It Up: Including Jump Components in the Measurement, Modeling, and Forecasting of Return Volatility. *The Review of Economics and Statistics*, 89(4), 701–720. <https://doi.org/10.1162/rest.89.4.701>
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., & Ebens, H. (2001). The distribution of realized stock return volatility. *Journal of Financial Economics*, 61(1), 43–76. [https://doi.org/10.1016/S0304-405X\(01\)00055-1](https://doi.org/10.1016/S0304-405X(01)00055-1)
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., & Dobrev, D. (2007). No-arbitrage semi-martingale restrictions for continuous-time volatility models subject to leverage effects, jumps and i.i.d. noise: Theory and testable distributional implications. *Journal of Econometrics*, 138(1), 125–180. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2006.05.018>
- Andersen, T. G., & Teräsvirta, T. (2009). Realized Volatility. In T. Mikosch, J.-P. Kreiß, R. A. Davis, & T. G. Andersen (Orgs.), *Handbook of Financial Time Series* (p. 555–575). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-71297-8_24

- Araújo Júnior, J. B. de. (2020). *Modelagem econométrica em alta frequência em um mercado de ações emergente* [Tese (Doutorado - Doutorado em Ciências Contábeis, Universidade de Brasília)]. <https://repositorio.unb.br/handle/10482/38742>
- Barndorff-Nielsen, O. E., & Shephard, N. (2002). Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 64(2), 253–280. <https://doi.org/10.1111/1467-9868.00336>
- Barndorff-Nielsen, O. E., & Shephard, N. (2004). Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps. *Journal of Financial Econometrics*, 2(1), 1–37. <https://doi.org/10.1093/jffinec/nbh001>
- Barunik, J., Krehlik, T., & Vacha, L. (2016). Modeling and forecasting exchange rate volatility in time-frequency domain. *European Journal of Operational Research*, 251(1), 329–340. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.12.010>
- Barunik, J., & Vacha, L. (2015). Realized wavelet-based estimation of integrated variance and jumps in the presence of noise. *Quantitative Finance*, 15(8), 1347–1364. <https://doi.org/10.1080/14697688.2015.1032550>
- Crowley, P. M. (2007). A Guide to Wavelets for Economists*. *Journal of Economic Surveys*, 21(2), 207–267. <https://doi.org/10.1111/j.1467-6419.2006.00502.x>
- Donoho, D. L., & Johnstone, I. M. (1994). Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81(3), 425–455. <https://doi.org/10.1093/biomet/81.3.425>
- Fan, J., & Wang, Y. (2007). Multi-Scale Jump and Volatility Analysis for High-Frequency Financial Data. *Journal of the American Statistical Association*, 102(480), 1349–1362. <https://doi.org/10.1198/016214507000001067>
- Gençay, R., Selçuk, F., & Whitcher, B. J. (2001). *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*. Elsevier.
- Hanousek, J., Kočenda, E., & Novotný, J. (2012). *The identification of price jumps*. 18(1), 53–77. <https://doi.org/10.1515/mcma-2011-0019>
- In, F., & Kim, S. (2012). *An introduction to wavelet theory in finance: A wavelet multiscale approach*. World Scientific.
- Laurent, S. (2018). *Estimating and forecasting ARCH models using G@rchTM 8*. Timberlake Consultants.
- Morettin, P. A. (2014). *Ondas e Ondaletas: Da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas de Séries Temporais* (2º ed). Edusp - Editora da Universidade de São Paulo. <https://www.edusp.com.br/livros/ondas-e-ondaletas/>
- Percival, D. B., & Walden, A. T. (2000). *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge University Press.
- Pinto, M. G. de F. (2021). *Long memory in high frequency time series using wavelets and conditional volatility models* [Mestrado em Estatística, Universidade de São Paulo]. <https://doi.org/10.11606/D.45.2021.tde-06052021-100559>
- R Core Team. (2020). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing. <https://www.R-project.org/>
- Rydberg, T. H., & Shephard, N. (2003). Dynamics of Trade-by-Trade Price Movements: Decomposition and Models. *Journal of Financial Econometrics*, 1(1), 2–25. <https://doi.org/10.1093/jffinec/nbg002>
- Santos, D. G., & Ziegelmann, F. A. (2014). Volatility Forecasting via MIDAS, HAR and their Combination: An Empirical Comparative Study for IBOVESPA. *Journal of Forecasting*, 33(4), 284–299. <https://doi.org/10.1002/for.2287>
- Wang, Y. (1995). Jump and sharp cusp detection by wavelets. *Biometrika*, 82(2), 385–397. <https://doi.org/10.1093/biomet/82.2.385>