

Erros Comuns Decorrentes de Sofismas Matemáticos

Common Mistakes Due to Mathematical Sophistry

Errores Comunes Debido a la Sofística Matemática

Recebido: 20/06/2022 | Revisado: 26/06/2022 | Aceito: 28/06/2022 | Publicado: 07/07/2022

Cícero José da Silva

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4241-7528>
Universidade de Pernambuco, Brasil
E-mail: cjs@poli.br

Willames de Albuquerque Soares

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3268-7241>
Universidade de Pernambuco, Brasil
E-mail: was@poli.br

Resumo

A matemática está presente no cotidiano das pessoas, seja formalmente no ambiente escolar ou acadêmico, ou em locais onde as formalidades não são necessariamente observadas. Utilizar os conceitos matemáticos de forma desatenta, podem gerar resultados que não satisfazem ou que não representam a realidade. Desta forma, o objetivo desse artigo foi apresentar alguns sofismas na matemática, expor algumas justificativas e evidenciar os erros cometidos nas argumentações. A partir de expressões básicas, conhecidas por uma grande parte dos estudantes, demonstrou-se como se pode obter absurdos matemáticos. Utilizou-se algumas resoluções apresentadas, geralmente por alunos que não se atentam as definições e hipóteses necessárias para as suas corretas aplicações. Também se criou um teorema que afirma o óbvio. Assim, pode-se concluir que ao utilizar argumentos matemáticos não válidos em uma demonstração ou aplicação, tais como aqueles que ferem axiomas, argumentos lógicos, definições ou hipóteses, é possível deduzir contradições ou resultados assustadores, que podem trazer surpresas.

Palavras-chave: Expressões matemáticas; Formal educação formal; Falácias.

Abstract

Mathematics is present in people's daily lives, whether formally in the school or academic environment, or in places where formalities are not necessarily observed. Using mathematical concepts carelessly can generate results that do not satisfy or do not represent reality. Thus, the objective of this article was to present some sophistry in mathematics, expose some justifications and highlight the errors made in the arguments. From basic expressions, known to a large part of the students, it was demonstrated how to obtain mathematical absurdities. Some resolutions presented were used, generally by students who do not pay attention to the definitions and hypotheses necessary for their correct applications. Also a theorem has been created that affirms the obvious. Thus, it can be concluded that when using invalid mathematical arguments in a demonstration or application, such as those that violate axioms, logical arguments, definitions or hypotheses, it is possible to deduce contradictions or frightening results, which can bring surprises.

Keywords: Mathematical expressions; Education formal; Fallacies.

Resumen

Las matemáticas están presentes en la vida cotidiana de las personas, ya sea formalmente en el ámbito escolar o académico, o en lugares donde no necesariamente se observan formalidades. Usar conceptos matemáticos sin cuidado puede generar resultados que no satisfacen o no representan la realidad. Así, el objetivo de este artículo fue presentar algunos sofismas en matemáticas, exponer algunas justificaciones y resaltar los errores cometidos en los argumentos. A partir de expresiones básicas, conocidas por gran parte de los alumnos, se demostró cómo obtener absurdos matemáticos. Algunas resoluciones presentadas fueron utilizadas, generalmente por estudiantes que no prestan atención a las definiciones e hipótesis necesarias para su correcta aplicación. También se ha creado un teorema que afirma lo óbvio. Así, se puede concluir que al utilizar argumentos matemáticos inválidos en una demostración o aplicación, como aquellos que violan axiomas, argumentos lógicos, definiciones o hipótesis, es posible deducir contradicciones o resultados espantosos, que pueden traer sorpresas.

Palabras clave: Expresiones matemáticas; Educación; Falacias.

1. Introdução

As operações e expressões matemáticas estão presentes em situações corriqueiras do dia a dia, sendo utilizadas desde

feiras a pesquisas científicas. Entretanto, suas aplicações são, por diversas vezes, despercebidas pelos seus usuários por estarem fora do âmbito educacional (Castro & Pereira, 2020).

A utilização de softwares matemáticos para a solução de problemas vem aumentando com o passar dos anos. Sendo utilizados e analisados a mais de uma década (Romeiro, et al., 2021; Ribeiro, et al., 2020; Silva, et al., 2012), tendo um aumento excepcional com a instauração da pandemia causada pelo SARS-CoV-2, mais conhecida como COVID-19 (Holanda & Soares, 2021). Entretanto, o uso destes softwares na resolução de expressões matemáticas sem o devido cuidado com suas hipóteses necessárias, podem causar um transtorno maior ainda, pois os alunos passam a acreditar na resposta fornecida pela máquina, como certa, independentemente de qualquer especulação. Mesmo com a utilização de diferentes técnicas de ensino, a importância nas hipóteses de cada conceito matemático deve ser percebida pelos alunos (Sobral & Soares, 2012; Castro, 2020; Santo & Santos, 2020).

Entretanto, muitas vezes a utilização de algumas técnicas matemáticas sem se tomar o devido cuidado com as hipóteses necessárias para tal aplicação, podem levar a resultados bastantes controversos. Ao utilizar argumentos não válidos em uma resolução ou demonstração, tais como aqueles que ferem axiomas, argumentos lógicos ou definições, possibilita-se deduzir contradições ou resultados assustadores, que podem trazer surpresas.

Diversos vezes, esses argumentos são propositadamente elaborados, de modo que, a partir de premissas verdadeiras, seja possível deduzir conclusões falsas (é comum alguns políticos usarem este tipo de argumentos). Neste caso, dizemos que, este tipo de raciocínio é um sofisma (ou falácia). O sofisma ou falácia é uma sequência de argumentos, aparentemente válidos, que podem ser usados para deduzir resultados falsos. O termo sofisma vem dos filósofos da Antiga Grécia chamados Sofistas (séc.IV a.C.), contra o qual opunha o filósofo Sócrates (470-399a.C.) através da Escola de Platão e Aristóteles. Freitas (2012), conceitua os sofismas como erros lógicos, sejam eles conscientes ou não, utilizados por enganadores, a fim de ludibriar e formar concepções equivocadas, conducentes a preconceitos ilegítimos, estereótipos e, provocando assim, más decisões.

Os sofismas são pouco trabalhados nas salas de aula da educação básica, e que poderiam ser aproveitadas em situações adequadas, e, desde que sejam usadas corretamente, elas se transformam em ferramenta para despertar a curiosidade dos estudantes. Assim, tais sofismas poderiam se tornar uma maneira divertida de reforçar a aprendizagem de certos conteúdos matemáticos, contribuindo para uma maior e mais motivada aprendizagem (Machado, et al., 2013, Souza, et al., 2019).

Embora possa se pensar que tais premissas inadequadas estejam presentes apenas em expressões presentes no ensino fundamental, seria um erro aceitar tal afirmação. Neste sentido de enfatizar erros lógicos que promulgam absurdos e que estão presentes em alguns tópicos específicos da matemática, Klymchuk e Staples (2013) apresentaram uma grande quantidade de sofismas e paradoxos matemáticos, voltados para um primeiro ano de um curso de cálculo diferencial e integral. Eles abordaram algumas possibilidades de sofismas em funções, limites, derivadas e integrais.

Contudo, vale ressaltar que um sofisma não é um paradoxo! Um paradoxo é uma sentença autocontraditória a que se chega por argumentos válidos. Lages (2014), apresenta cinco paradoxos matemáticos bastante interessantes, a saber: do barbeiro, do mentiroso, do enforcamento inesperado, o problema de Monty Hall e a corrida de Aquiles e a tartaruga. Os paradoxos em matemática consistem de uma interessante área da lógica matemática, que divertem e podem ser utilizados na introdução de diversos temas, seja no ensino fundamental, médio o superior (Pinto, 2010; Brasileiro Filho, 2010; Dorta, 2013, Monteiro & Mondini, 2019).

Desta forma, o objetivo deste estudo é evidenciar alguns erros, costumeiramente cometidos, na resolução de equações matemáticas, decorrentes da falta de observância das hipóteses necessárias.

2. Metodologia

A metodologia deste trabalho consiste na apresentação de alguns exemplos, na demonstração dessas propriedades e na aplicação desses conceitos matemáticos, sem a devida atenção necessária para as suas hipóteses, levando a absurdos matemáticos.

2.1 Distributividade na multiplicação de radicais

No ensino fundamental aprendemos que podemos separar um radical que é composto por um produto em produto de dois radicais, ou seja:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (1)$$

Essa propriedade pode ser demonstrada da seguinte forma (BARTLE 2019): sejam $x_0 = \sqrt{a}$ e $y_0 = \sqrt{b}$, então, temos:

$$x_0 y_0 = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (2)$$

Como $x_0^2 = a$ e $y_0^2 = b$. Assim que

$$(x_0 y_0)^2 = x_0^2 y_0^2 = ab \Rightarrow x_0 y_0 = \sqrt{ab} \quad (3)$$

Ao comparar as equações (2) e (3), obtemos a equação (1).

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b}$$

Utilizando-se dessa propriedade e da unidade imaginária i , onde $i^2 = -1$, podemos ser levados a “comprovar” que $1 = -1$, por meio do seguinte sofisma:

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{1} \\ \sqrt{1} &= \sqrt{(-1) \cdot (-1)} \\ 1 &= \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(-1)} \\ 1 &= i \cdot i \\ 1 &= i^2 \\ 1 &= -1 \end{aligned}$$

2.2 Produto igual a zero

Quando temos um produto de dois (ou mais) números, onde o resultado deste produto iguala-se a zero, necessariamente um deles é o elemento nulo, ou seja: $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0 \quad (4)$$

A prova desta afirmação pode ser facilmente obtida (LIMA 2020). Suponhamos $a \neq 0$, então, vem:

$$ab = 0 \Rightarrow (a^{-1}a)b = a^{-1}0 = 0 \Rightarrow b = 0 \quad (5)$$

Procedendo de forma análoga, se $b \neq 0$ então, $a = 0$, e, portanto, ou $a = 0$ ou $b = 0$. Assim:

1º passo – sejam dois números quaisquer iguais

$$x = y$$

2º passo – podemos multiplicar ambos os lados por um número qualquer, inclusive um dos já presentes na equação, ou seja:

$$x^2 = xy$$

3º passo – podemos adicionar o número oposto a ambos os lados, obtendo:

$$x^2 - xy = 0$$

4º passo – como temos elementos comuns aos monômios da equação, podemos colocá-lo em evidência, ou seja:

$$x(x - y) = 0$$

5º passo – e assim, utilizando (erroneamente) o princípio da multiplicação de dois termos ser iguais a zero, concluir que necessariamente

$$x = 0$$

2.3 Quadrado da diferença

Considerando que $(a - b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$, podemos demonstrar que os números 2 e 3 são iguais, seguindo os seguintes passos:

1º passo - qualquer número é igual a si mesmo, digamos:

$$-6 = -6$$

2º passo - podemos escrever esse número como resultado de diferentes expressões

$$4 - 10 = 9 - 15$$

3º passo - também podemos adicionar um mesmo número a ambos os lados de uma equação, sem que o seu resultado seja modificado:

$$4 - 10 + \frac{25}{4} = 9 - 15 + \frac{25}{4}$$

4º passo – podemos escrever essa nova expressão como desdobramentos do produto notável quadrado da diferença:

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

5º passo – agora contraímos esse produto notável, encontrando:

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$$

6º passo – como ambos os lados da equação está elevado ao quadrado, podemos simplifica-lo, encontrando que:

$$2 - \left(\frac{5}{2}\right) = 3 - \left(\frac{5}{2}\right)$$

7º passo – por último podemos simplificar a expressão, eliminando os termos comuns e concluindo que:

$$2 = 3$$

2.4 Implicações lógicas

Por último, e não menos interessante, deixamos um teorema que é o sonho de muitos alunos:

O Teorema Fundamental: Todos os alunos serão aprovados.

Demonstração:

(i) Na turma X os alunos são inteligentes e pouco estudiosos, Então, retirando os alunos pouco estudiosos, restarão apenas alunos estudiosos, assim, os mesmos devem ser aprovados.

(ii) Na turma X os alunos são muito estudiosos e poucos inteligentes, Então, retirando os alunos pouco inteligentes da turma, restarão apenas alunos estudiosos, assim, os mesmos devem ser aprovados.

(iii) Na turma X os alunos são muito inteligentes e estudiosos, de sorte que, só teremos alunos estudiosos, assim, os mesmos devem ser aprovados.

Decorre dos itens (i),(ii) e (iii) que a única coisa que falta para todos sejam aprovados: é estudar.

Conclusão: Logo, Todos os alunos serão aprovados.

3. Resultados e Discussão

Como resultados, apresentaremos considerações de como foram gerados os absurdos matemáticos.

3.1 Distributividade na multiplicação de radicais

Esse absurdo decorre da falta de atenção em não se verificar a hipótese inicial da comprovação da propriedade, que afirma que $\forall a, b \in R, a, b \geq 0$, tem-se $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

3.2 Produto igual a zero

É bastante comum encontrar entre exercícios e avaliações encontrar esse tipo de situação, onde o aluno utiliza apenas parte da conclusão de um teorema. Todavia, sem perceber que a possibilidade de que qualquer um termo da equação poderá ser zero, pode-se chegar ao absurdo de que se dois números são iguais, necessariamente ele é zero.

3.3 Quadrado da diferença

O desmembramento de um produto notável também pode nos velar a absurdos, se não nos atermos aos detalhes das propriedades que usamos. Ao decorrer desta forma, não se deu a devida atenção na eliminação das potências existentes na expressão (passo 6), uma vez que não se considerou a possibilidade da igualdade com o elemento negativo da expressão. Para uma função modular, temos que:

$$\forall a, b \in R, a^2 = b^2 \Rightarrow |a| = |b| \quad (5)$$

A demonstração desta afirmação é apresentada em dois casos, e são apresentados da seguinte forma (MORAIS FILHO, 2012):

1º Caso: se $x \geq 0$ então

$$|x|^2 = |x||x| = x \cdot x = x^2$$

2º Caso: se $x < 0$ então

$$|x|^2 = |x||x| = (-x) \cdot (-x) = x^2$$

Consequentemente, dos dois casos, temos que:

$$\sqrt{(x^2)} = |x|$$

No exemplo acima, para encontrar a forma correta na resolução, temos que perceber que:

$$\sqrt{\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2} = \left|2 - \frac{5}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \sqrt{\left(3 - \frac{5}{2}\right)^2} = \left|3 - \frac{5}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

3.4 Implicações lógicas

Na verdade, o teorema não diz nada, apenas utiliza implicações lógicas levam a uma única possibilidade, que os alunos devem estudar.

4. Conclusão

O artigo buscou demonstrar de forma exemplificada como a utilização de conceitos matemáticos, sem o devido conhecimento de suas hipóteses podem promover absurdos matemáticos. Foram apresentados quatro sofismas matemáticos,

que utilizaram: produto de igualdade zero, equação modular, produto notável, números complexos, dentre outros.

Evidenciou-se que os sofismas são fatores extremamente importantes no que diz respeito à aplicação da matemática, e que não se pode deixar ser ludibriado com manipulações algébricas que induzam ao erro, uma vez que podem gerar grandes estragos, tanto em pesquisas como em situações cotidianas.

Conclui-se que é de fundamental importância para o correto aprendizado e posteriores aplicações da matemática, para que as manipulações de certas premissas não sejam aceitas na demonstração e determinações de alguns resultados.

Referências

- Bartle, R. G. (2019). *Introduction to Real Analysis*. J. Wiley.
- Castro, B. P. & Pereira, A. A. S. (2020). Educação matemática no ensino fundamental: matemática de caráter prático nos anos iniciais. *Revista Científica UNIFAGOC*, 1, 140-150.
- Freitas, J. (2012). *Sustentabilidade. Direito ao futuro*. Fórum.
- Holanda, M. A. & Soares, W. A. (2021). O Uso de Softwares e Plataformas On-line no Ensino da Matemática. *Research, Society and Development*, 10, 1-10. doi:10.33448/rsd-v10i11.19551
- Klymchuk, S. & Staples, S. (2013). *Paradoxes and Sophisms in Calculus*. Washington: Mathematical Association of America, 98p. 10.5948/9781614441106
- Lages, L. (2014). 5 paradoxos da lógica e da matemática. *Revista Superinteressante*. Disponível em: <https://super.abril.com.br/coluna/superlistas/5-paradoxos-da-logica-e-da-matematica/>
- Lima, E. L. (2020). *Curso de Análise*, 1 (18a ed.), IMPA.
- Morais Filho, D. C. (2012). *Um convite à Matemática - Coleção do Professor de Matemática*, 1ª, IMPA.
- Ribeiro, V. G., Zabadal, J., Trommer, T., Silveira, A. L. M., Silveira, S. R., Bertoloni, C., Cunha, G. B. & Bigolin, N. M. (2020). Emprego de Técnicas de Gamificação na Educação Científica: relato de uma intervenção como apoio à Estatística. *Research, Society and Development*, 9(1), 1-26.
- Romeiro, R. A. G., Garcia, R. V. & Romão, E. C. (2021). O ensino de funções e a educação tecnológica: o simulador PHET e o software Winplot como facilitadores da aprendizagem. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, 11(2), 111-131.
- Santo, E. E. & Santos, W. S. (2020). A gamificação como elemento potencializador de um modelo pedagógico para a educação a distância. Anais do Congresso Internacional de Educação e Tecnologias – *Encontro de Pesquisadores em Educação a Distância*, São Carlos, SP, Brasil. <https://cietenped.ufscar.br/submissao/index.php/2020/article/view/1167>.
- Silva, A. C., Santos, L. V. & Soares, W. A. (2012). Utilização do Winplot Como Software Educativo Para o Ensino de Matemática. *Diálogos: Revista de Estudos Culturais e da Contemporaneidade*, 187-206.
- Sobral, P. M. & Soares, W. A. (2012). O uso dos recursos metodológicos propostos por Malba Tahan na sala de aula atual. *Diálogos, Revista de Estudos Culturais e da Contemporaneidade*, p. 209-229. doi:10.13115/2236-1499.2012v1n7p209
- Balieiro Filho, I. F. (2010). Alguns paradoxos da matemática: um resgate histórico e possibilidades para o ensino e a aprendizagem. In: *XXXIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*. Anais [...]. Águas de Lindóia: SBMAC, 2010. http://arquivo.sbmoc.org.br/publi_cnmac/errata2010/826.pdf
- Monteiro, G. L. & Mondini, F. (2019). Paradoxos falsídicos: os primeiros enfrentamentos do conceito de infinito no contexto da ciência matemática. *Actio*, 4(2), 30-47.
- Dorta, F. (2013). *Os paradoxos e as aulas de matemática: algumas reflexões e sugestões*. 2013. 162 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de Londrina, Londrina.
- Machado, R. B. Schuck, C. A. & Wagner, D. R. (2013). Convergências no infinito: discussões sobre arte, matemática e olhar. In: *Encontro Nacional de Educação em Matemática*. Anais [...]. PUC-PR.
- Pinto, C. F. (2010). Jogos, Desafios e Paradoxos para Sala de Aula: Uma ótima ferramenta para motivar seus alunos. In: *X Encontro Nacional de Educação Matemática*, Salvador.
- Souza, J. M. P., Silva, J. E. M. C., Oliveira Neto, J. S., & Ferreira, R. G. C. (2019). Falácias: trapaças matemáticas. *VI Encontro Internacional de Jovens Investigadores*. <https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/57668>