

## **Análise não linear de treliças considerando modelos hiperelásticos pelo método dos elementos finitos posicional**

**Nonlinear analysis of trusses considering hyperelastic models by the positional finite element method**

**Análisis no lineal de cerchas considerando modelos hiperelásticos por el método de elementos finitos posicionales**

Recebido: 08/07/2022 | Revisado: 26/07/2022 | Aceito: 29/07/2022 | Publicado: 07/08/2022

### **Denn's Santana Perônica**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1266-677X>  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil  
E-mail: [dennsantana.sb@gmail.com](mailto:dennsantana.sb@gmail.com)

### **Daniel Nelson Maciel**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3971-4724>  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil  
E-mail: [daniel.maciел@ufrn.br](mailto:daniel.maciел@ufrn.br)

### **Rodrigo Barros**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7218-2646>  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil  
E-mail: [rodrigo.barros@ufrn.br](mailto:rodrigo.barros@ufrn.br)

### **Joel Araújo do Nascimento Neto**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4842-1587>  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil  
E-mail: [joelneto@ct.ufrn.br](mailto:joelneto@ct.ufrn.br)

### **José Neres da Silva Filho**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9138-1771>  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil  
E-mail: [jneres@ect.ufrn.br](mailto:jneres@ect.ufrn.br)

### **Resumo**

Nos últimos anos, houve um aumento na utilização de materiais hiperelásticos em estruturas, como por exemplo, polímeros vulcanizados ou naturais. Em virtude disso, torna-se relevante expandir o conhecimento quanto ao desempenho mecânico destes materiais por meio do desenvolvimento de modelos numéricos que simulem o seu comportamento e que sejam capazes de apresentar previsões mais realistas. Para materiais representados por modelos hiperelásticos, a consideração das não linearidades física e geométrica é mais adequada para representar o seu comportamento mecânico quando submetidos a grandes deformações. Desse modo, o presente trabalho objetiva a implementação de um código computacional, com o propósito de analisar e comparar o comportamento mecânico de treliças considerando a não linearidade física, descrita por modelos hiperelásticos, e a não linearidade geométrica utilizando a formulação posicional em elementos finitos. Foi utilizado o método do comprimento de arco de Riks-Wempner associado ao método iterativo de Newton-Raphson para traçar caminhos de equilíbrio com fenômenos de *snap-through* e *snap-back*. Foram considerados os modelos hiperelásticos Neo-Hookean, de Mooney-Rivlin, Polinomial, de Yeoh, de Ogden e de Arruda-Boyce. A validação do programa implementado se deu por meio da comparação com soluções analíticas e resultados numéricos e experimentais de trabalhos científicos.

**Palavras-chave:** Hiperelasticidade; Não linearidade física; Não linearidade geométrica; Newton-Raphson; Comprimento de arco.

### **Abstract**

In recent years, there has been an increase in the use of hyperelastic materials in structures, such as vulcanized or natural polymers. As a result, it becomes relevant to expand the knowledge regarding the mechanical performance of these materials through the development of numerical models that simulate their behavior and that are capable of presenting more realistic predictions. For materials represented by hyperelastic models, the consideration of physical and geometric nonlinearities is more adequate to represent their mechanical behavior when subjected to large deformations. Thus, the present work aims at the implementation of a computational code, with the purpose of analyzing and comparing the mechanical behavior of trusses considering the physical non-linearity, described by hyperelastic models, and the geometric non-linearity using the positional formulation in finite elements. The Riks-Wempner arc length method associated with the Newton-Raphson iterative method was used to trace equilibrium paths with snap-through and snap-

back phenomena. The Neo-Hookean, Mooney-Rivlin, Polynomial, Yeoh, Ogden and Arruda-Boyce hyperelastic models were considered. The validation of the implemented program took place through the comparison with analytical solutions and numerical and experimental results of scientific papers.

**Keywords:** Hyperelasticity; Physical nonlinearity; Geometric nonlinearity; Newton-Raphson; Arc length.

### Resumen

En los últimos años, ha habido un aumento en el uso de materiales hiperelásticos en estructuras, como polímeros vulcanizados o naturales. Por lo tanto, se vuelve relevante ampliar el conocimiento sobre el comportamiento mecánico de estos materiales a través del desarrollo de modelos numéricos que simulen su comportamiento y que sean capaces de presentar predicciones más realistas. Para materiales representados por modelos hiperelásticos, la consideración de no linealidades físicas y geométricas es más adecuada para representar su comportamiento mecánico cuando se someten a grandes deformaciones. Así, el presente trabajo tiene como objetivo la implementación de un código computacional, con el propósito de analizar y comparar el comportamiento mecánico de trusses considerando la no linealidad física, descrita por modelos hiperelásticos, y la no linealidad geométrica utilizando la formulación posicional en finitos. Se utilizó el método de longitud de arco de Riks-Wempner asociado con el método iterativo de Newton-Raphson para trazar caminos de equilibrio con fenómenos de salto y retroceso. Se consideraron los modelos hiperelásticos Neo-Hookean, Mooney-Rivlin, Polynomial, Yeoh, Ogden y Arruda-Boyce. La validación del programa implementado se realizó mediante la comparación con soluciones analíticas y resultados numéricos y experimentales de trabajos científicos.

**Palabras clave:** Hiperelasticidad; No linealidad física; No linealidad geométrica; Newton-Raphson; Longitud de arco.

## 1. Introdução

Para realização de um projeto de engenharia, faz-se necessário o projetista conhecer previamente as propriedades mecânicas dos materiais empregados e o comportamento da estrutura como um todo, para que se possa prever a resposta da mesma frente às possíveis solicitações. Para isso, têm-se a mecânica computacional, que tem como principal objetivo a representação e análise de forma mais precisa possível de estruturas reais em modelos físicos teóricos.

Existem alguns tipos básicos de elementos para representar e analisar estruturas, como por exemplo, placas, cascas, sólidos, treliças, vigas, etc. Dentre esses, destacam-se as treliças, que são estruturas reticuladas formadas por elementos lineares (barras) e são conectadas de modo que não há transmissão de momento pela conexão.

Uma importante ferramenta para análise estrutural utilizada frequentemente entre os pesquisadores é o Método dos Elementos Finitos (MEF), que tem como objetivo obter a resposta de uma determinada estrutura com condições de contorno definidas submetidas a certo conjunto de cargas (Mafaldo, et al., 2022), o qual possui um caso particular conhecido como formulação posicional (MEFP), que foi introduzida por Coda (2003). Essa formulação é baseada no princípio da mínima energia potencial e as incógnitas fundamentais do problema são as posições nodais do elemento finito, e não os deslocamentos, que são as incógnitas na formulação padrão dos elementos finitos para sólidos.

Em relação aos materiais, de acordo com Pascon (2008), houve um aumento na utilização de elementos estruturais altamente deformáveis e elásticos, dos quais é possível citar os elastômeros, polímeros naturais ou vulcanizados preenchidos ou não com negro de carbono. Dentre suas aplicações na engenharia, podem ser citados os suportes para máquinas, juntas estruturais e de dilatação flexíveis, vedações para portas de veículos automotivos, aparelhos de apoio, entre outros.

Os modelos que melhor representam o comportamento dos componentes estruturais poliméricos são os modelos hiperelásticos, que caracterizam materiais que possuem relações entre tensão e deformação não lineares, consideradas através de uma teoria elástica denominada hiperelasticidade ou elasticidade de Green, que pode ser entendida como a extensão do comportamento linear elástico para o campo de grandes deformações (Suzuki, 2013).

Segundo Rezende (2020), a diferença entre os materiais hiperelásticos e os elásticos lineares está relacionado ao fato de que a relação tensão *vs* deformação é derivada de uma função densidade de energia de deformação e não de um fator constante. Os materiais hiperelásticos possuem uma não linearidade física, que se refere à uma relação tensão *vs* deformação não linear ainda na fase elástica do material. Enquanto que a não linearidade geométrica se refere à influência do deslocamento da estrutura

no seu equilíbrio, conhecida como efeitos de segunda ordem, onde o deslocamento da estrutura afeta a condição de carga, gerando assim uma não linearidade (Gomes, 2019).

Logo, o presente trabalho propõe implementar modelos hiperelásticos em um código computacional para realizar a verificação do comportamento mecânico de treliças planas e espaciais sob efeito de solicitações externas, avaliando a influência quando levado em conta a não linearidade física (hiperelasticidade) comparada com o modelo elástico linear, e considerando a não linearidade geométrica da formulação posicional do método dos elementos finitos.

## 2. Metodologia

Foi desenvolvido o código fonte em linguagem de programação MATLAB® para analisar não linearmente treliças planas e espaciais, sendo utilizado a versão acadêmica<sup>1</sup> para tal finalidade. Para a análise não linear geométrica, foi adotado o MEFP, pois o mesmo alcançou resultados satisfatórios em análises não lineares de variadas estruturas.

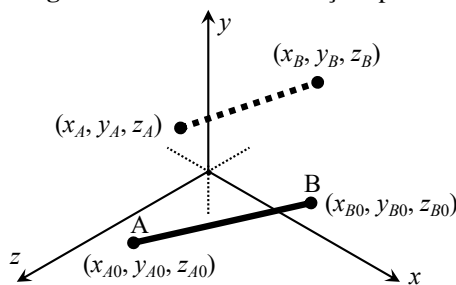
### 2.1 MEFP aplicado à treliça

Segundo Becho (2016), a formulação posicional foi desenvolvida inicialmente para analisar estruturas reticuladas planas de natureza não linear geométrica com carregamento estático e conservativo, sendo baseada nas posições nodais da estrutura em relação a um sistema de coordenadas fixo no espaço para descrever a cinemática dos elementos finitos, que corresponde à descrição Lagrangiana Total.

#### 2.1.1 Cinemática

Conforme Pascon (2008), cinemática é a descrição do movimento de um corpo ou de uma estrutura sem considerar as causas dessa mudança de configuração. Na Figura 1 é exibida a cinemática geral de um elemento de treliça espacial (barra). As coordenadas  $(x_{A0}, y_{A0}, z_{A0})$  e  $(x_{B0}, y_{B0}, z_{B0})$  correspondem a configuração inicial do elemento de barra, ou seja, são as coordenadas de referência. Ao sofrer uma mudança de configuração em virtude dos deslocamentos da treliça, o elemento agora possui novas coordenadas. As coordenadas dos nós dos elementos são agrupadas em um vetor posição  $\mathbf{X} = [x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B]^T = X_i = [X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6]^T$ .

**Figura 1** - Elemento de treliça espacial.



Fonte: Autores.

O comprimento da barra indeformada ( $L_0$ ) e o comprimento da barra deformada ( $L$ ) são determinados pelas Equações 1 e 2, respectivamente.

$$L_0 = \sqrt{(x_{B0} - x_{A0})^2 + (y_{B0} - y_{A0})^2 + (z_{B0} - z_{A0})^2} \quad (1)$$

$$L = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad (2)$$

<sup>1</sup> <https://www.mathworks.com/products/matlab/student.html>

Para o caso de uma treliça plana, desconsideram-se as parcelas da cota  $z$ . Um parâmetro utilizado na formulação é a taxa de alongamento  $\lambda$ , dado pela razão entre os comprimentos do elemento deformado e indeformado ( $L/L_0$ ). É importante ressaltar que treliças são estruturas que sofrem essencialmente por esforços uniaxiais, logo, apenas a deformação longitudinal é considerada na formulação.

### 2.1.2 Princípio da mínima energia potencial

O princípio da mínima energia potencial é o princípio mais empregado na formulação posicional do MEF. Para problemas estáticos, a formulação é baseada na energia potencial total  $\Pi$  que é descrita em termos de energia de deformação total do sistema  $U_e$  e da energia potencial das forças externas aplicadas  $P$ , conforme apresentado na Equação 3.

$$\Pi = U_e + P \quad (3)$$

De acordo com o modelo constitutivo do material, a energia de deformação total pode ser expressa para o volume de referência  $V$  de acordo com a Equação 4.

$$U_e = \int_V u \, dV \quad (4)$$

Destacando-se que a energia de deformação é nula na posição não deformada. A variável  $u$  é a energia de deformação específica do material, determinada conforme indicado na Equação 5.

$$u = \int_{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon \quad (5)$$

A energia de deformação específica depende da medida de deformação  $\varepsilon$  e do seu par energético conjugado de tensão  $\sigma$ . Existem diferentes medidas de deformação conhecidas, como as de Almansi ( $\varepsilon_A$ ), Hiperbólica ( $\varepsilon_H$ ), Logarítmica ( $\varepsilon_L$ ), de engenharia ( $\varepsilon_E$ ) e de Green ( $\varepsilon_G$ ). Contudo, de acordo com Greco & Costa (2012) e Fernandes et al. (2021), a energia de deformação específica do material  $u$  é a mesma independente da medida de deformação adotada. Considerando a medida de deformação de engenharia  $\varepsilon_E$ , cujo par energético conjugado de tensão  $\sigma_E$  é expresso pela lei elástica linear de Hooke ( $\sigma_E = E\varepsilon_E$ ), onde  $E$  representa o módulo de elasticidade do material, e sabendo que tal medida de deformação se relaciona com a taxa de alongamento ( $\varepsilon_E = \lambda - 1$ ), tem-se a energia de deformação específica do material em função de  $\lambda$ , como indicado na Equação 6.

$$u = \int_{\varepsilon_E} E\varepsilon_E \, d\varepsilon_E = \int_{\lambda} E(\lambda - 1) \, d\lambda = E \left( \frac{\lambda^2}{2} - \lambda \right) \quad (6)$$

Vale ressaltar que isso é aplicado para materiais homogêneos, isotrópicos e elásticos. Para os modelos hiperelásticos, a energia de deformação depende da função de energia livre específica  $\psi$  de cada modelo. A energia potencial das forças externas aplicadas é descrita na Equação 7.

$$P = - \sum F_i X_i = - \mathbf{F}^T \mathbf{X} \quad (7)$$

Onde  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças externas aplicadas na direção das coordenadas do vetor posição  $\mathbf{X}$ . É importante observar que a energia potencial das forças aplicadas pode não ser zero na configuração de referência. De acordo com Lacerda (2014), o princípio da energia potencial mínima estabelece que a configuração equilibrada corresponde a um valor mínimo da energia potencial total. A minimização do funcional de energia deve ocorrer mediante parâmetros de posições dos pontos, pelos quais pode-se aproximar as condições do contínuo. Em outras palavras, a configuração equilibrada é obtida requerendo que todas derivadas parciais em relação as coordenadas  $X_i$  se anulem, como mostrado na Equação 8.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_i} = \frac{\partial U_e}{\partial X_i} - F_i = 0 \quad (8)$$

Onde a derivada parcial de  $U_e$  em relação as coordenadas  $X_i$  é o vetor de forças internas  $\mathbf{q}$ , ou seja,  $\nabla U_e = \mathbf{q}$ . A Equação 8 representa um sistema de equações de equilíbrio, sendo este não linear e cuja solução pode ser obtida pelo método iterativo de Newton-Raphson.

### 2.1.3 Método iterativo de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é um método numérico clássico aplicado na engenharia e na ciência para resolver sistemas de equações não lineares. Em resumo, esse método inicia com uma primeira estimativa  $\mathbf{X}^{(0)}$  para uma solução aproximada do sistema. Em seguida, são encontradas estimativas sucessivamente mais próximas da solução para o sistema de equações ( $\mathbf{X}^{(0)}$ ,  $\mathbf{X}^{(1)}$ , ...,  $\mathbf{X}^{(n)}$ ). O procedimento continua até que uma solução suficientemente precisa seja alcançada usando o critério de convergência  $\|\mathbf{X}^{(n+1)} - \mathbf{X}^{(n)}\| \leq tol$ , no qual  $tol$  é a tolerância desejada pelo usuário.

Como o método de Newton-Raphson é iterativo e busca convergir a Equação 8, isso significa que a cada iteração haverá um resíduo, podendo a Equação 8 ser reescrita na forma indicada na Equação 9.

$$g(X_i) = \frac{\partial \Pi}{\partial X_i} = \frac{\partial U_e}{\partial X_i} - F_i \quad (9)$$

Onde  $g(X_i)$  é o vetor de forças residuais ou de desequilíbrio, sendo o objetivo do método zerar o valor desse vetor residual na próxima iteração, ou seja,  $\mathbf{g}(\mathbf{X}^{(n+1)}) = 0$ . Desse modo, o método de Newton-Raphson é dado pela fórmula iterativa apresentada na Equação 10.

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{X}^{(n)} - \frac{\mathbf{g}(\mathbf{X}^{(n)})}{\mathbf{g}'(\mathbf{X}^{(n)})} \quad (10)$$

Onde  $\mathbf{g}'$  é a matriz Jacobiana do vetor  $\mathbf{g}$  avaliada na posição  $\mathbf{X}^{(n)}$ . Essa matriz também é conhecida como matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_t$  ou matriz Hessiana da energia de deformação  $\mathbf{H}$  (Lacerda, et al., 2013). Observando-se a Equação 9, nota-se que o vetor de forças residuais  $\mathbf{g}$  é o gradiente da energia potencial total do sistema, isto é,  $\mathbf{g} = \nabla \Pi = \nabla U_e - \mathbf{F} = \mathbf{q} - \mathbf{F}$ . Por sua vez, a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_t$  é determinada pelo gradiente do vetor de forças residuais, logo,  $\mathbf{K}_t = \nabla \mathbf{g} = \nabla (\mathbf{q} - \mathbf{F}) = \nabla \mathbf{q}$ , uma vez que  $\nabla \mathbf{F}$  é nulo, pois o vetor de forças externas  $\mathbf{F}$  não depende do vetor posição  $\mathbf{X}$ . Por fim, com base nessas informações, reescrevendo-se a Equação 10 em função dos vetores de forças internas e externas e da matriz de rigidez tangente, obtém-se a Equação 11.

$$\mathbf{X}^{(n+1)} = \mathbf{X}^{(n)} - \frac{\mathbf{q}(\mathbf{X}^{(n)}) - \mathbf{F}}{\mathbf{K}_t(\mathbf{X}^{(n)})} = \mathbf{X}^{(n)} - \frac{\nabla U_e - \mathbf{F}}{\nabla \mathbf{q}(\mathbf{X}^{(n)})} \quad (11)$$

De acordo com Greco et al. (2006), uma característica da formulação posicional é a descrição do elemento de barra diretamente no sistema de coordenadas global e, portanto, não requer a transformação da matriz entre coordenadas locais e globais encontrada na formulação do deslocamento do método dos elementos finitos. Isso ocorre em virtude de que todas as derivadas são encontradas em um único sistema de coordenadas.

O método de Newton-Raphson apresenta apenas a solução de um ponto no caminho de equilíbrio. Então combina-se as iterações de Newton-Raphson com um procedimento incremental, aplicando as iterações para vários ciclos, onde os mesmos podem ser prescritos por níveis de força ou de deslocamento. Contudo, ao se analisar o comportamento de uma treliça, seja por meio do controle de força ou controle de deslocamento, a mesma pode apresentar problemas de convergência ao se traçar o

caminho de equilíbrio, pois ambas as prescrições possuem suas limitações. Quando é utilizado o controle de força ocorre o fenômeno de *snap-through*, que é um salto repentino de deslocamento. E quando é utilizado o controle de deslocamento ocorre o fenômeno de *snap-back*, que é um salto repentino de força.

Para contornar esses problemas de convergência no caminho do equilíbrio da estrutura, existem métodos que podem ser combinados com o método de Newton-Raphson, como o método de deslocamento constante, trabalho externo constante, comprimento de arco, entre outros (Miyazaki, et al., 2020), sendo o método do comprimento de arco um dos mais utilizados pelos pesquisadores.

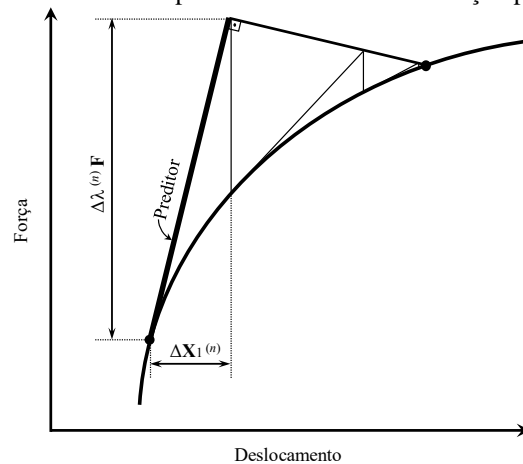
### 2.1.4 Método do comprimento de arco

Existem versões diferentes da técnica de continuação do comprimento de arco. O método do comprimento de arco com restrição plana normal proposto por Riks (1972, 1979) e Wempner (1971) teve caráter pioneiro. Será aqui abordado o método de Riks-Wempner, em conformidade com Lacerda (2014) e Miyazaki et al. (2020).

Enquanto que o procedimento incremental-iterativo do método de Newton-Raphson realiza um controle de força ou deslocamento, o método do comprimento de arco associado ao método de Newton-Raphson incrementa simultaneamente a força e o deslocamento. Para que isso seja possível, é acrescentado uma nova restrição no sistema de equações de equilíbrio e uma nova incógnita, o fator de carga  $\lambda$ .

A primeira solução estimada de um ciclo  $n$  é denominada de solução preditora ou preditor. Na Figura 2 é apresentado o processamento do método do comprimento de arco com a restrição plana normal utilizando iterações do método de Newton-Raphson. Na mesma figura é ilustrado a solução preditora, sendo representada pelos incrementos iniciais do fator de carga  $\Delta\lambda^{(n)}$  e do deslocamento  $\Delta\mathbf{X}_1^{(n)}$ , calculados pelas Equações 12 e 13, respectivamente.

**Figura 2** - Método do comprimento de arco com restrição plana normal.



Fonte: Autores.

$$\Delta\lambda^{(n)} = \pm \frac{\Delta l^{(n)}}{\|\delta\mathbf{X}_F^{(n)}\|} \quad (12)$$

$$\Delta\mathbf{X}_1^{(n)} = \Delta\lambda^{(n)} \delta\mathbf{X}_F^{(n)} \quad (13)$$

Onde  $\Delta l^{(n)}$  é o comprimento do preditor que é tangente ao caminho do equilíbrio e  $\delta\mathbf{X}_F^{(n)}$  é um vetor de subincremento do deslocamento causado pelas forças externas, determinado pela razão entre o vetor de forças externas e a matriz de rigidez tangente da iteração anterior, logo,  $\delta\mathbf{X}_F^{(n)}$  também é tangente ao caminho de equilíbrio. O sinal indefinido da solução preditora da Equação 12 está relacionado ao fato que preditor  $\Delta\mathbf{X}_1^{(n)}$  pode ter ou não o mesmo sentido do vetor  $\delta\mathbf{X}_F^{(n)}$ , portanto, determinar

o sentido do avanço do preditor é de extrema importância para convergência do método do comprimento de arco. O sinal é determinado a partir do produto interno entre o incremento de deslocamento  $\Delta\mathbf{X}^{(n-1)}$  obtido no ciclo anterior e o subincremento de deslocamento inicial  $\delta\mathbf{X}_F^{(n)}$  do ciclo atual, ou seja:

- a) se  $(\Delta\mathbf{X}^{(n-1)})^T \delta\mathbf{X}_F^{(n)} > 0$ , então o preditor  $\Delta\mathbf{X}_1^{(n)}$  tem o mesmo sentido de  $\delta\mathbf{X}_F^{(n)}$ , e a Equação 12 tem sinal positivo;
- b) se  $(\Delta\mathbf{X}^{(n-1)})^T \delta\mathbf{X}_F^{(n)} < 0$ , então o preditor  $\Delta\mathbf{X}_1^{(n)}$  tem sentido oposto de  $\delta\mathbf{X}_F^{(n)}$ , e a Equação 12 tem sinal negativo.

Após determinar o sinal da Equação 12, atualiza-se o incremento de deslocamento  $\Delta\mathbf{X}^{(n)} = \Delta\mathbf{X}_1^{(n)}$ . Em seguida, encontra-se o vetor de forças internas  $\mathbf{q}(\mathbf{X}^{(n-1)} + \Delta\mathbf{X}^{(n)})$  e o vetor de forças residuais  $\mathbf{g}^{(n)}$  dado pela Equação 14.

$$\mathbf{g}^{(n)} = \mathbf{q}^{(n)} - (\lambda^{(n-1)} + \Delta\lambda^{(n)})\mathbf{F} \quad (14)$$

Em seguida é iniciado o método iterativo de Newton-Raphson associado ao método do comprimento de arco com restrição plana normal. Calcula-se primeiramente o componente  $\delta\mathbf{X}_g^{(i)}$  que é gerado pela força residual  $\mathbf{g}^{(n)}$ , conforme a Equação 15, e posteriormente determina-se a correção do subincremento do fator de carga  $\delta\lambda^{(i)}$ , como exibido na Equação 16. Utilizando estes últimos, calcula-se o subincremento do deslocamento  $\delta\mathbf{X}^{(i)}$ , dado pela Equação 17.

$$\delta\mathbf{X}_g^{(i)} = -\mathbf{K}_t^{(n-1)} \setminus \mathbf{g}^{(n)} \quad (15)$$

$$\delta\lambda^{(i)} = -\frac{[\Delta\mathbf{X}_1^{(n)}]^T \delta\mathbf{X}_g^{(i)}}{[\Delta\mathbf{X}_1^{(n)}]^T \delta\mathbf{X}_F^{(n)}} \quad (16)$$

$$\delta\mathbf{X}^{(i)} = \delta\mathbf{X}_g^{(i)} + \delta\lambda^{(i)}\delta\mathbf{X}_F^{(n)} \quad (17)$$

Atualiza-se então os incrementos de fator de carga  $\Delta\lambda^{(i)}$  e de deslocamento  $\Delta\mathbf{X}^{(i)}$  somando-se os seus respectivos subincrementos, apresentados nas Equações 18 e 19, respectivamente.

$$\Delta\lambda^{(i)} = \Delta\lambda^{(i-1)} + \delta\lambda^{(i)} \quad (18)$$

$$\Delta\mathbf{X}^{(i)} = \Delta\mathbf{X}^{(i-1)} + \delta\mathbf{X}^{(i)} \quad (19)$$

Recalcula-se o vetor de forças internas  $\mathbf{q}(\mathbf{X}^{(n-1)} + \Delta\mathbf{X}^{(i)})$  e o vetor de forças residuais  $\mathbf{g}^{(i)}$  do mesmo modo exibido na Equação 14. Por fim, é verificado o critério de convergência, que é alcançado quando a norma Euclidiana da força residual  $\mathbf{g}^{(i)}$  dividida pela norma do vetor de forças externas aplicadas  $\mathbf{F}$  é menor ou igual que a tolerância desejada. Quando o critério é atingido, encerra-se o procedimento iterativo e atualiza-se o fator de carga  $\lambda^{(n)}$  e o vetor posição  $\mathbf{X}^{(n)}$ , conforme indicados nas Equações 20 e 21, respectivamente.

$$\lambda^{(n)} = \lambda^{(n-1)} + \Delta\lambda^{(n)} \quad (20)$$

$$\mathbf{X}^{(n)} = \mathbf{X}^{(n-1)} + \Delta\mathbf{X}^{(n)} \quad (21)$$

O comprimento do preditor ou comprimento do arco pode ser variável. O método para determinar o comprimento do arco é baseado no fato de que mais iterações são necessárias para convergir em trechos que ocorrem grandes mudanças no caminho do equilíbrio. Consiste em estimar o comprimento do preditor  $\Delta l^{(n)}$  de modo que o número de iterações para convergir no ciclo  $n$  seja igual a um número de iterações desejadas  $N_d$ , como exibido na Equação 22.



$$\Delta l^{(n)} = \Delta l^{(n-1)} \left( \frac{N_d}{N^{(n-1)}} \right)^{1/2} \quad (22)$$

Onde  $\Delta l^{(n-1)}$  e  $N^{(n-1)}$  são o comprimento do arco e o número de iterações que foram utilizadas para convergir no ciclo  $n - 1$ , respectivamente. No Algoritmo 1 é apresentado o algoritmo do comprimento de arco de Riks-Wempner. Foi adotada uma versão modificada do método de Newton-Raphson, onde a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_t$  é determinada apenas uma vez no início de cada ciclo.

**Algoritmo 1** - Método do comprimento de arco de Riks-Wempner.

```

λ = 0; X = X(0); ΔX = 0;
for n = 1 to nmax
    Kt = ∂q(X) / ∂X;
    δXF = Kt \ F;
    Δλ = Δl / ||δXF||;
    if (ΔX)TδXF < 0
        Δλ = - Δλ;
    end
    ΔX1 = ΔλδXF;
    ΔX = ΔX1;
    g = q(X + ΔX) - (λ + Δλ)F;
    for i = 1 to imax
        δXg = - Kt \ g;
        δλ = - [ΔX1]TδXg / [ΔX1]TδXF;
        δX = δXg + δλδXF;
        Δλ = Δλ + δλ;
        ΔX = ΔX + δX;
        g = q(X + ΔX) - (λ + Δλ)F;
        if ||g|| ≤ tol · ||F||
            break;
        end
    end
    X = X + ΔX;
    λ = λ + Δλ;
    Δl = Δl (Nd / i)1/2;
end

```

Fonte: Adaptado de Lacerda (2014).

## 2.2 Modelos hiperelásticos

Para que se possa aplicar o método dos elementos finitos posicional em estruturas sujeitas a grandes deslocamentos e deformações, é preciso expressar na forma de energia específica de deformações a equação constitutiva do material hiperelástico, que relaciona o estado de tensão em função de um histórico de deformação do corpo (Belo, 2009).

De acordo com Hoss (2009), pode-se, de um modo geral, agrupar as teorias constitutivas para materiais hiperelásticos em duas categorias:



a) Modelos Fenomenológicos: são baseados na observação do comportamento do material durante os ensaios experimentais. Esses modelos assumem que a borracha é um material isotrópico na sua forma fundamental, ou seja, uma longa cadeia de moléculas de elastômeros randomicamente orientadas. Entre os principais modelos fenomenológicos pode-se citar: Mooney-Rivlin, Neo-Hookean, Ogden, Fung, Yeoh, Polinomiais, Hyperfoam.

b) Modelos Micromecânicos: são modelos estatísticos desenvolvidos a partir de informações sobre as ligações químicas do material, como comprimento de cadeias moleculares, tipos de ligações químicas e variáveis termodinâmicas. Entre os principais modelos micromecânicos, pode-se citar: Arruda-Boyce, Gent.

Um modelo hiperelástico genérico é caracterizado pela existência de uma energia livre específica de deformação  $\psi$ , a qual define a energia elástica armazenada no material por unidade de volume não deformado, relativa à configuração de referência, que é função da deformação do corpo presente.  $\psi$  pode ser expressa em função dos invariantes de deformação ou dos estiramentos principais, conforme indicado na Equação 23.

$$\psi = \psi(I_1, I_2, I_3) = \psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (23)$$

Para vários tipos de polímeros, a variação volumétrica observada em ensaios experimentais é muito pequena, mesmo para elevado estado de deformação. Devido a isso, muitos modelos hiperelásticos assumem ser incompressíveis, ou seja, sem variação de volume. Nestes casos, o terceiro invariante de deformação  $I_3$  tem valor unitário, o que torna a função de energia livre dependente apenas e  $I_1$  e  $I_2$  (Vieira, et al., 2010).

Conforme Rezende (2020), para materiais incompressíveis o tensor de Cauchy pode ser descrito como na Equação 24 em função dos alongamentos principais.

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_i} \quad (24)$$

Para o caso de treliças, onde somente ocorre esforços uniaxiais, e, portanto, apenas deformação longitudinal, os estiramentos principais são escritos em função do alongamento  $\lambda$ , onde  $\lambda_1 = \lambda$  e os alongamentos  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  são iguais. Com a hipótese da incompressibilidade é possível determiná-los em função de  $\lambda$ , sendo  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1/\sqrt{\lambda}$ . Logo, os invariantes de deformação  $I_1$  e  $I_2$  em função da razão de alongamento  $\lambda$  são dados conforme a Equações 25a e 25b, e as tensões correspondentes da tensão uniaxial são expressas como exibido na Equação 26.

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad (25a)$$

$$I_2 = \frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda \quad (25b)$$

$$\sigma_1 = \sigma = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (26)$$

Por fim, a solução analítica tanto para tração quanto para compressão uniaxial foi encontrada por Rivlin & Saunders (1951) a partir da Equação 26 e levando em conta as Equações 25a e 25b, expresso pela Equação 27.

$$\sigma = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \quad (27)$$

A seguir serão descritos os modelos de energia livre específica de deformação  $\psi$  para alguns dos principais modelos hiperelásticos.

### 2.2.1 Modelo polinomial

Este modelo fenomenológico é um dos mais recentes modelos baseados em potências dos invariantes de deformação  $I_1$  e  $I_2$ . O modelo Polinomial tenta ajustar a curva tensão vs deformação a um polinômio de grau desejado. Sua energia livre específica de deformação é expressa pela Equação 28.

$$\psi_{PO}(I_1, I_2) = \sum_{p+q \leq 1}^N C_{pq}(I_1 - 3)^p(I_2 - 3)^q \quad (28)$$

Em que  $C_{pq}$  são as constantes do material para um número  $N$  de termos. A partir da Equação 28, a energia livre específica de deformação do modelo polinomial considerando  $N = 2$  (N2) é determinada e apresentada na Equação 29, e aplicando esta última na Equação 27 é obtida a solução analítica para a tensão uniaxial, mostrada na Equação 30.

$$\psi_{PO} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{02}(I_2 - 3)^2 \quad (29)$$

$$\sigma_{PO} = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( C_{10} + C_{11}(I_2 - 3) + 2C_{20}(I_1 - 3) + \frac{C_{01} + 2C_{02}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)}{\lambda} \right) \quad (30)$$

### 2.2.2 Modelo de Mooney-Rivlin

Esse método possui diversas versões, sendo a primeira delas publicada por Mooney (1940). Outras versões baseadas no primeiro e segundo invariantes foram estudadas por Rivlin & Saunders (1951). O modelo de Mooney-Rivlin é um dos mais conhecidos e utilizados dentre os modelos hiperelásticos, principalmente na simulação numérica de borrachas e derivados. Sua energia livre específica de deformação é expressa pela Equação 31.

$$\psi_{MR}(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (31)$$

Onde  $C_{10}$  e  $C_{01}$  são constantes materiais a serem determinadas durante o processo de calibração. Aplicando a Equação 31 na Equação 27 é obtida a solução analítica para a tensão uniaxial, exibida na Equação 32.

$$\sigma_{MR} = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda} \right) \quad (32)$$

### 2.2.3 Modelo Neo-Hookean

Este modelo foi proposto em Treloar (1975), e é obtido como um caso particular do modelo de Mooney-Rivlin, atribuindo  $C_{01} = 0$  e  $C_{10} = \mu/2$ , onde  $\mu$  é o módulo de cisalhamento. Sua função de energia livre fica então baseada apenas no primeiro invariante de deformação, conforme indicado na Equação 33.

$$\psi_{NH}(I_1) = C_{10}(I_1 - 3) \quad (33)$$

Trata-se do mais simples dentre os modelos hiperelásticos. Aplicando a Equação 33 na Equação 27 é obtida a solução analítica para a tensão uniaxial, exibida na Equação 34.

$$\sigma_{NH} = 2C_{10} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (34)$$

### 2.2.4 Modelo de Ogden

Uma nova forma de energia livre baseada nos alongamentos principais ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ) foi proposta por Ogden (1972), diferentemente dos demais modelos que são baseados nos invariantes. Sua energia livre específica de deformação é expressa pela Equação 35.

$$\psi_{OG}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{2\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad (35)$$

Onde  $N$  é o número total de termos da série e  $\mu_p$  e  $\alpha_p$  são parâmetros do material, podendo assumir valores positivos ou negativos. A partir da Equação 35, a energia livre específica de deformação do modelo de Ogden considerando  $N = 4$  (N4) é determinada e apresentada na Equação 36, e aplicando esta última na Equação 27 é obtida a solução analítica para a tensão uniaxial, exibida na Equação 37.

$$\psi_{OG} = \frac{2\mu_1}{\alpha_1} (\lambda^{\alpha_1} + 2\lambda^{-\frac{\alpha_1}{2}} - 3) + \frac{2\mu_2}{\alpha_2} (\lambda^{\alpha_2} + 2\lambda^{-\frac{\alpha_2}{2}} - 3) + \frac{2\mu_3}{\alpha_3} (\lambda^{\alpha_3} + 2\lambda^{-\frac{\alpha_3}{2}} - 3) + \frac{2\mu_4}{\alpha_4} (\lambda^{\alpha_4} + 2\lambda^{-\frac{\alpha_4}{2}} - 3) \quad (36)$$

$$\sigma_{OG} = 2 \left( \mu_1 (\lambda^{\alpha_1-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_1}{2}-1}) + \mu_2 (\lambda^{\alpha_2-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_2}{2}-1}) + \mu_3 (\lambda^{\alpha_3-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_3}{2}-1}) + \mu_4 (\lambda^{\alpha_4-1} - \lambda^{-\frac{\alpha_4}{2}-1}) \right) \quad (37)$$

### 2.2.5 Modelo de Yeoh

Modelo proposto por Yeoh (1990), pode ser considerado como um caso particular do modelo polinomial, baseando-se apenas no primeiro invariante de deformação. Sua energia livre específica de deformação é expressa pela Equação 38.

$$\psi_{YE}(I_1) = \sum_{p=1}^N C_{p0} (I_1 - 3)^p \quad (38)$$

O modo mais comum de utilização desse modelo se dá para  $N = 3$ , podendo ser utilizado para caracterizar borrachas preenchidas com negro de carbono, ajustando-se bem as faixas de grandes deformações, porém apresentando desvios consideráveis em pequenas deformações. A partir da Equação 38, a energia livre específica de deformação do modelo de Yeoh considerando  $N = 3$  (N3) é determinada e apresentada na Equação 39, e aplicando esta última na Equação 27 é obtida a solução analítica para a tensão uniaxial, mostrada na Equação 40.

$$\psi_{YE} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (39)$$

$$\sigma_{YE} = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) (C_{10} + 2C_{20}(I_1 - 3) + 3C_{30}(I_1 - 3)^2) \quad (40)$$

### 2.2.6 Modelo de Arruda-Boyce

Trata-se de um modelo micromecânico e foi proposto por Arruda & Boyce (1993). O modelo de Arruda-Boyce também é conhecido como *eight-chain model* (modelo de oito cadeias). É um modelo com constantes pré definidas, baseado no primeiro invariante. Sua energia livre específica de deformação é expressa pela Equação 41.

$$\psi_{AB}(I_1) = \mu \sum_{p=1}^N \frac{C_p}{\lambda_L^{2p-2}} (I_1^p - 3^p) \quad (41)$$

$\mu$  é obtido por meio da equação química  $\mu = hK_B T$ , e  $K_B$  é a constante de Boltzmann,  $h$  é uma função da densidade de cadeias elastoméricas e  $T$  a temperatura. Fisicamente,  $\lambda_L$  representa o alongamento máximo que uma molécula atinge e é obtido através de uma análise micromecânica. A partir da Equação 41, a energia livre específica de deformação do modelo de Arruda-Boyce considerando  $N = 5$  (N5) é apresentada na Equação 42, e as constantes  $C_p$  são obtidas pela expansão em séries da função de Langevin inversa, exibidas na Equação 43. Aplicando a Equação 42 na Equação 27 e substituindo os coeficientes  $C_p$ , é obtida a solução analítica para a tensão uniaxial, exibida na Equação 44.

$$\psi_{AB} = \mu \left( C_1 (I_1 - 3) + \frac{C_2}{\lambda_L^2} (I_1^2 - 3^2) + \frac{C_3}{\lambda_L^4} (I_1^3 - 3^3) + \frac{C_4}{\lambda_L^6} (I_1^4 - 3^4) + \frac{C_5}{\lambda_L^8} (I_1^5 - 3^5) \right) \quad (42)$$

$$C_1 = \frac{1}{2}; \quad C_2 = \frac{1}{20}; \quad C_3 = \frac{11}{1050}; \quad C_4 = \frac{19}{7050}; \quad C_5 = \frac{519}{673750}. \quad (43)$$

$$\sigma_{AB} = 2\mu \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \frac{I_1}{\lambda_L^2} + \frac{11}{350} \frac{I_1^2}{\lambda_L^4} + \frac{38}{3525} \frac{I_1^3}{\lambda_L^6} + \frac{519}{134750} \frac{I_1^4}{\lambda_L^8} \right) \quad (44)$$

As constantes do material para os modelos hiperelásticos são obtidas através do ajuste da curva tensão vs deformação de ensaios experimentais do comportamento do material. O ajuste das curvas é efetuado pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ).

### 2.3 Vetor de forças internas e matriz de rigidez tangente

É necessário determinar alguns parâmetros para o desenvolvimento da formulação posicional aplicada às treliças, como o gradiente de comprimento, vetor de forças internas  $\mathbf{q}$  e a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_t$ . Inicialmente determina-se o gradiente do comprimento do elemento deformado ao quadrado  $L^2$ . A partir da Equação 2, tem-se que o gradiente de  $L^2$  é dado conforme a Equação 45.

$$\nabla L^2 = \frac{\partial L^2}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} \left[ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \right] = 2d_i \quad (45)$$

$$d_i = [x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B, x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A]^T \quad (46)$$

Sabendo que o gradiente de comprimento ao quadrado é igual ao dobro do comprimento da barra vezes o seu gradiente, tem-se o gradiente do comprimento da barra deformada, apresentada na Equação 47.

$$\frac{\partial L^2}{\partial X_i} = 2L \frac{\partial L}{\partial X_i} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial X_i} = \frac{1}{2L} \frac{\partial L^2}{\partial X_i} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial X_i} = \frac{d_i}{L} \quad (47)$$

Como abordado anteriormente, a energia de deformação específica do material, tanto para o modelo elástico linear como para os modelos hiperelásticos, dependem da razão de alongamento  $\lambda$ , logo, a determinação das expressões para o vetor de forças internas  $\mathbf{q}$  e para a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_t$  deriva dessa razão. O gradiente da razão de alongamento é exibido na Equação 48.

$$\nabla \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} \left[ \frac{L}{L_0} \right] = \frac{1}{L_0} \frac{\partial L}{\partial X_i} = \frac{d_i}{L_0 L} \quad (48)$$

Substituindo a Equação 6 na Equação 4 e considerando a não variação de volume do elemento de treliça ( $V = AL_0$ ), sendo  $A$  a área da seção transversal do elemento, temos que a energia de deformação  $U_e$  do modelo elásticos linear é dada pela Equação 49.

$$U_e = EAL_0 \left( \frac{\lambda^2}{2} - \lambda \right) \quad (49)$$

O vetor de forças internas  $\mathbf{q}$  expresso pelo gradiente da energia de deformação total é apresentado na Equação 50.

$$q_i = \nabla U_e = \frac{\partial}{\partial X_i} \left[ EAL_0 \left( \frac{\lambda^2}{2} - \lambda \right) \right] = EAL_0 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda^2}{\partial X_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial X_i} \right) = EAL_0 \left( \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial X_i} - \frac{\partial \lambda}{\partial X_i} \right) = EA \left( \frac{1}{L_0} - \frac{1}{L} \right) d_i \quad (50)$$

Por sua vez, a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_t$  é determinada pelo gradiente do vetor de forças internas, conforme apresentado na Equação 51.

$$K_{ij} = \nabla q_i = \frac{\partial q_i}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left[ EA \left( \frac{d_i}{L_0} - \frac{d_i}{L} \right) \right] = \frac{EA}{L_0} \frac{\partial d_i}{\partial X_j} - EA \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{d_i}{L} \right) = \frac{EA}{L_0} \frac{\partial d_i}{\partial X_j} - \frac{EA}{L} \frac{\partial d_i}{\partial X_j} - EAd_i \otimes \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{1}{L} \right) \quad (51)$$

Onde  $\otimes$  representa o produto tensorial. Aplicando-se a regra do quociente de cálculo das derivadas e reajustando-se a expressão, é encontrado a matriz de rigidez tangente do modelo elástico linear, sendo este apresentado na Equação 52.

$$K_{ij} = EA \left( \frac{1}{L_0} - \frac{1}{L} \right) \frac{\partial d_i}{\partial X_j} - EAd_i \otimes \left( \frac{-\frac{\partial L}{\partial X_j}}{L^2} \right) = EA \left( \frac{1}{L_0} - \frac{1}{L} \right) \frac{\partial d_i}{\partial X_j} - EAd_i \otimes \left( \frac{-d_j}{L^3} \right) = EA \left( \frac{1}{L_0} - \frac{1}{L} \right) \frac{\partial d_i}{\partial X_j} + \frac{EA}{L^3} d_i \otimes d_j$$

$$K_{ij} = EA \left( \frac{1}{L_0} - \frac{1}{L} \right) C_{ij} + \frac{EA}{L^3} D_{ij} \quad (52)$$

Onde as matrizes  $C_{ij}$  e  $D_{ij}$  são expressas pelas Equações 53 e 54, respectivamente.

$$C_{ij} = \frac{\partial d_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$D_{ij} = d_i \otimes d_j \quad (54)$$

A determinação do vetor de forças internas  $\mathbf{q}$  e da matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_t$ , considerando os modelos hiperelásticos é realizada de forma análoga ao do modelo elástico linear. A diferença é que, no lugar da energia de deformação específica  $u$  do material, é utilizado a energia livre específica de deformação  $\psi$  do modelo correspondente, apresentados na seção 2.2.

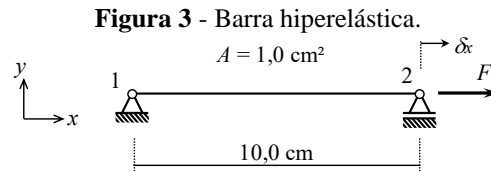
### 3. Resultados e Discussão

A seguir serão apresentados alguns exemplos numéricos. Os exemplos 1 e 2 são de treliças de um único elemento, cujo intuito é validar o programa comparando com soluções analíticas e dados experimentais presentes na literatura científica. Em seguida serão aplicadas treliças mais complexas e de maior esforço computacional.

#### 3.1 Exemplo 1 - barra hiperelástica tracionada

Na Figura 2 é apresentada uma barra hiperelástica submetida à uma força horizontal  $F$  no nó 2, simulando um teste de tração uniaxial. O objetivo da aplicação desse exemplo é comparar as respostas obtidas pela formulação proposta considerando

os modelos hiperelásticos não lineares com os dados experimentais extraídos de ensaios de tração uniaxial de elastômeros com negro de carbono presentes no trabalho de Paula et al. (2019), como também comparar com soluções analíticas.



Fonte: Autores.

As soluções analíticas são obtidas a partir da tensão de Cauchy ( $\sigma = F/A$ ), sendo a força  $F$  descrita em termos do deslocamento horizontal  $\delta_x$  e a tensão  $\sigma$  depende do modelo hiperelástico considerado, descritas na seção 2.2. A solução analítica para o modelo hiperelástico de Mooney-Rivlin é descrito na Equação 55, e para os demais modelos são obtidas de forma análoga.

$$F_{MR}(\delta_x) = \sigma_{MR}(\delta_x)A = 2A \left( \frac{L_0 + \delta_x}{L_0} - \left( \frac{L_0 + \delta_x}{L_0} \right)^{-2} \right) \left( C_{10} + C_{01} \frac{L_0}{L_0 + \delta_x} \right) \quad (55)$$

Em seu trabalho, Paula et al. (2019) realizaram o ensaio de tração uniaxial de quatro amostras de elastômeros com diferentes porcentagens de negro de carbono (0%, 10%, 30% 60%). Foi realizado o ajuste das curvas pelo MMQ para obter as constantes constitutivas dos modelos hiperelásticos e foi utilizado o resultado da amostra com 0% de negro de carbono (D00). Foi utilizado o método incremental-iterativo de Newton-Raphson com controle de deslocamento. Para efeito de comparação, foram considerados alguns modelos com diferentes valores de  $N$ , os modelos Polinomial N1-N2, Yeoh N1-N3, Ogden N1-N4 e Arruda-Boyce N1-N5.

Foi calculado o coeficiente de determinação  $R^2$  para avaliar a proximidade do ajuste das curvas dos modelos hiperelásticos com os pontos da curva tensão *vs* deformação. Sendo o  $R^2$  expresso pela Equação 56.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{NP} (\sigma(\varepsilon_i) - \sigma_i)^2}{\sum_{i=1}^{NP} (\sigma_i - \bar{\sigma})^2} \quad (56)$$

Sendo  $\bar{\sigma}$  a média aritmética dos valores  $\sigma_i$  dos pontos da curva. O coeficiente de determinação varia entre  $0 < R^2 < 1$ , onde, quanto mais próximo de 1, mais ajustada está a função aos dados experimentais (boa correlação), enquanto que, quanto mais próximo de 0, menos ajustada está a mesma aos dados experimentais (baixa correlação). Para os modelos Neo-Hookean e de Mooney-Rivlin, foi implementado a possibilidade de encontrar o número máximo de pontos da curva tensão *vs* deformação no qual os modelos apresentassem um coeficiente de determinação  $R^2$  maior ou igual que um  $R_{min}^2$ . Foi considerado um coeficiente de determinação mínimo  $R_{min}^2$  de 0,9.

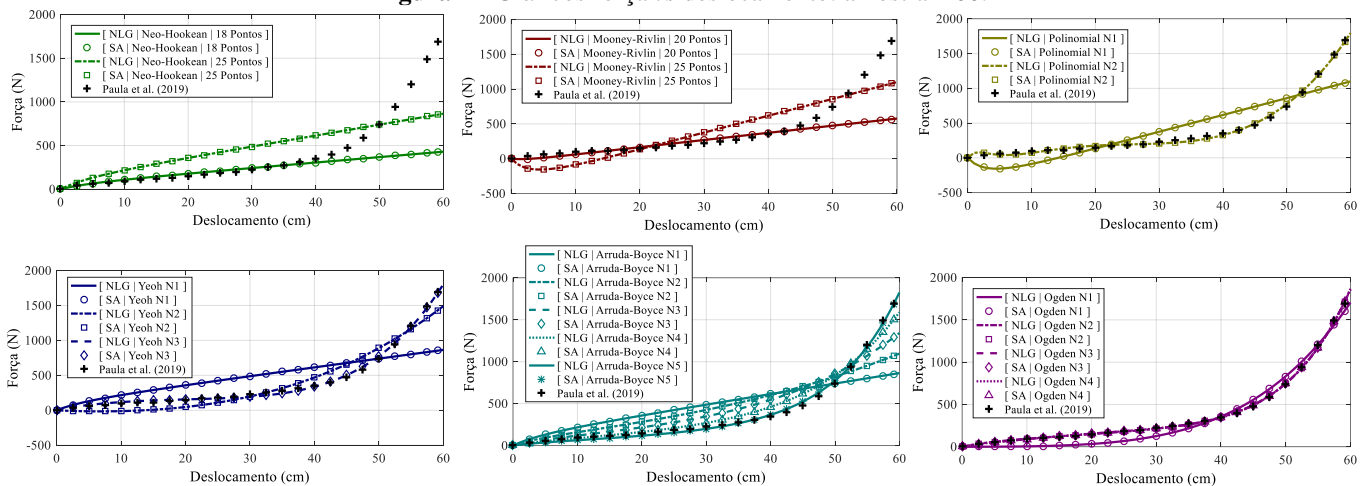
As constantes constitutivas e o coeficiente de determinação de cada modelo hiperelástico, para a amostra D00 são apresentadas na Tabela 1. Os coeficientes são exibidos em MPa, com exceção de  $\lambda_L$  do modelo de Arruda-Boyce e dos  $\alpha_N$  do modelo de Ogden, que são adimensionais. Na Figura 4 são apresentados os gráficos de força *vs* deslocamento horizontal do nó 2 da treliça, comparando os resultados do programa com as soluções analíticas e com os dados experimentes do trabalho de Paula et al. (2019).

**Tabela 1** - Constantes constitutivas dos modelos hiperelásticos (MPa): amostra D00.

Modelo	N	C <sub>01</sub>	C <sub>02</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>11</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>30</sub>	R <sup>2</sup>		
Polinomial	1	-2,903	-	1,203	-	-	-	0,7476		
	2	12,453	4,416	-10,173	-0,796	0,106	-	0,9974		
Yeoh	1	-	-	0,619	-	-	-	0,5775		
	2	-	-	-0,085	-	0,012	-	0,9341		
	3	-	-	0,373	-	-0,011	2,98E-04	0,9975		
Modelo	N	μ	λ <sub>L</sub>	R <sup>2</sup>	Modelo		Nº Pontos	C <sub>10</sub>	C <sub>01</sub>	R <sup>2</sup>
Arruda-Boyce	1	1,238	3,334	0,5775	Mooney-Rivlin	20	0,508	-0,664	0,9080	
	2	0,833		0,7562		25	1,203	-2,903	0,7476	
	3	0,616		0,8878		Neo-Hookean	18	0,308	-	0,9313
	4	0,455		0,9681			25	0,619	-	0,5775
	5	0,328		0,9963						
Modelo	N	μ <sub>1</sub>	α <sub>1</sub>	μ <sub>2</sub>	α <sub>2</sub>	μ <sub>3</sub>	α <sub>3</sub>	μ <sub>4</sub>	α <sub>4</sub>	R <sup>2</sup>
Ogden	1	1,01E-03	5,647	-	-	-	-	-	-	0,9678
	2	0,319	1,815	2,37E-06	8,711	-	-	-	-	0,9992
	3	0,191	2,453	0,798	6,263	-0,799	6,262	-	-	0,9993
	4	0,397	1,010	0,079	5,441	-0,28	5,141	0,23	4,885	0,9994

Fonte: Autores.

**Figura 4** - Gráficos força vs deslocamento: amostra D00.



Fonte: Autores.

Como é possível observar, a resposta numérica obtida pelo programa desenvolvido apresentou boa concordância com as soluções analíticas para todos os modelos hiperelásticos considerados. A amostra D00 alcançou uma faixa de deformação em torno de 600%. Considerando como ótima precisão os modelos que apresentam um  $R^2 > 0,99$ , é possível notar que os modelos que descreveram uma ótima precisão do comportamento da barra para a amostra D00 foram os modelos Yeoh N3, Polinomial N2, Arruda-Boyce N5 e Ogden N2-N4, e dentre todos esses, o modelo de Ogden N4 descreveu uma maior precisão com  $R^2 = 0,9994$ , e até mesmo com  $N = 1$ , o modelo de Ogden apresentou boa precisão com  $R^2 = 0,9678$ .

De um modo geral, analisando os gráficos e os coeficientes de determinação  $R^2$ , nota-se que quanto maior o número  $N$  modelos Polinomial, Yeoh, Ogden e Arruda-Boyce, maior é a proximidade do comportamento descrito pelos modelos em relação aos dados experimentais, ou seja, maior é o  $R^2$ . Notou-se também que os modelos Neo-Hookean e Mooney-Rivlin descrevem um comportamento não linear apenas para faixas de deformações entre 0 e 100%, descrevendo comportamento linear para as demais faixas de deformações.

Os modelos Polinomial N1, Mooney-Rivlin e Yeoh N2 descreveram uma força negativa para deslocamentos inferiores a aproximadamente 15,0 cm, o que é uma incoerência, uma vez que a barra está sendo tracionada. Percebe-se também que quando



$N = 1$ , os modelos de Yeoh e Arruda-Boyce coincidem com o modelo Neo-Hookean, e o modelo Polinomial coincide com o modelo de Mooney-Rivlin.

### 3.2 Exemplo 2 - treliça plana

Na Figura 5 é apresentada uma treliça plana de altura  $h = 10,0$  cm e largura  $a = 40,0$  cm (relação  $h/a$  de 0,25). O objetivo dessa simulação é mostrar as diferenças entre as análises considerando as linearidades e não linearidades físicas e geométricas, validando o programa por meio da comparação com as soluções analíticas.

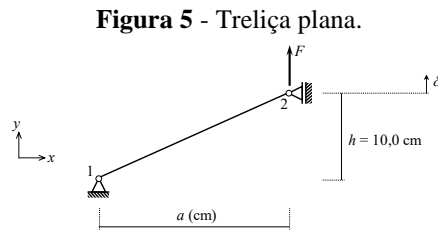


Figura 5 - Treliça plana.

Fonte: Autores.

Com intuito de comparar o comportamento mecânico de uma treliça por meio de análises lineares e não lineares físicas, é necessário que os modelos elásticos e hiperelásticos descrevam a curva tensão vs deformação de um mesmo material. A curva tensão vs deformação do material a ser aplicado nos exemplos 2 ao 4 foi extraído do trabalho de Marczak & Iturrioz (2006), correspondente à um ensaio de tração uniaxial de borracha natural com 55% de negro de carbono. A curva tensão vs deformação do material e as constantes constitutivas do modelo elástico linear e dos modelos hiperelásticos são apresentados na Figura 6.

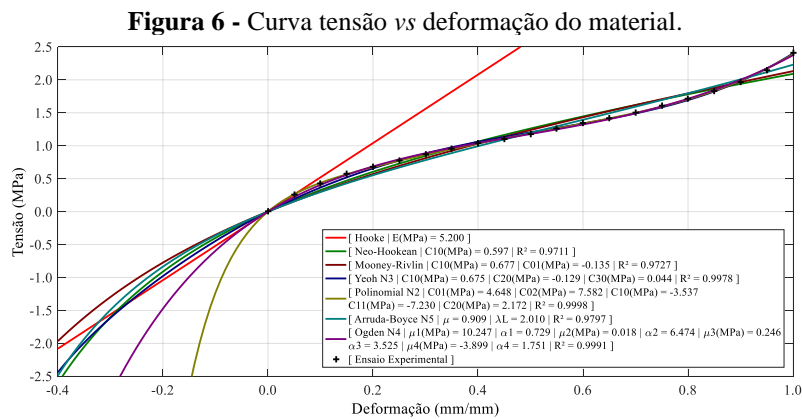


Figura 6 - Curva tensão vs deformação do material.

Fonte: Autores.

A amostra foi ensaiada até uma deformação de 100%. Nota-se que o ajuste da curva de tração de todos os seis modelos hiperelásticos apresentaram um coeficiente de determinação maior que 0,97, tendo o modelo Polinomial N2 apresentado o melhor ajuste, com um coeficiente de determinação igual a 0,9998. É possível observar também que os modelos hiperelásticos descreveram um comportamento diferente para as curvas de tração e compressão. E embora as curvas de compressão sigam as mesmas equações teóricas das curvas de tração, elas apresentam um comportamento bem mais agressivo, principalmente as dos modelos Polinomial N2 e Ogden N4, que divergem mais rapidamente. Contudo, de acordo com Marczak & Iturrioz (2006), esse comportamento divergente na curva de compressão é esperado.

Para a análise linear física (LF) será considerada a lei elástica linear de Hooke ( $\sigma = E\varepsilon$ ), e para análise não linear física (NLF) serão considerados os seis modelos hiperelásticos. A seguir serão apresentadas nas Equações 57 a 60 as soluções analíticas

considerado a linearidade geométrica (LG), sendo exibida apenas a solução analítica para o modelo Neo-Hookean, e as demais soluções são encontradas de modo análogo.

$$F_{LG|LF}(\delta_y) = \frac{EAh^2}{L_0^3} \delta_y; \quad F_{LG|NH}(\delta_y) = \frac{2C_{10}Ah}{L_0} \left[ \left(1 + \frac{h\delta_y}{L_0^2}\right) - \left(1 + \frac{h\delta_y}{L_0^2}\right)^{-2} \right] \quad (57) \text{ e } (58)$$

$$\frac{dF_{LG|LF}}{d\delta_y} = \frac{EAh^2}{L_0^3}; \quad \frac{dF_{LG|NH}}{d\delta_y} = \frac{2C_{10}Ah^2}{L_0^3} \left[ 1 + 2 \left(1 + \frac{h\delta_y}{L_0^2}\right)^{-3} \right] \quad (59) \text{ e } (60)$$

Onde  $\delta_y$  é o deslocamento vertical do nó 2 e as Equações 59 e 60 representam a rigidez que a estrutura possui em relação ao deslocamento  $\delta_y$  na análise física linear e não linear do modelo Neo-Hookean, respectivamente. Considerando a não linearidade geométrica (NLG), as soluções analíticas na posição deformada são dadas pelas Equações 61 a 64.

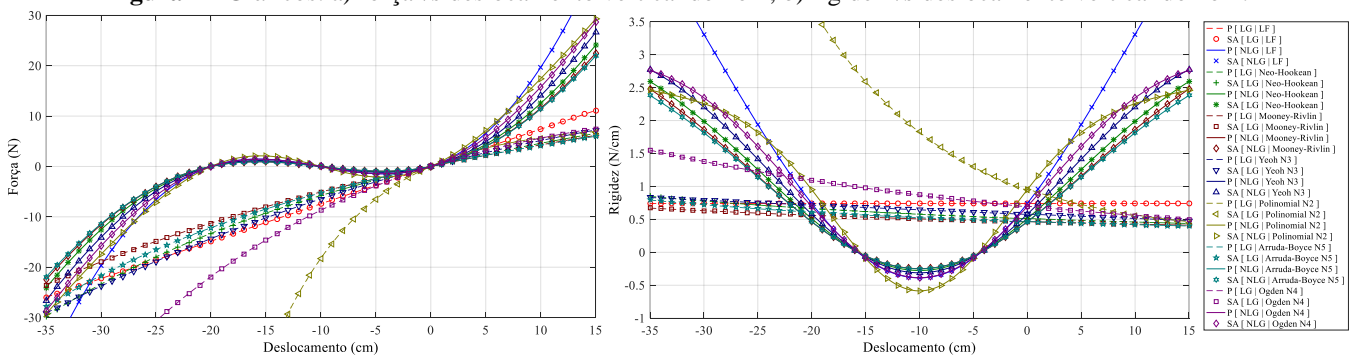
$$F_{NLG|LF}(\delta_y) = \frac{EA}{L_0} (h + \delta_y) \left[ 1 - \frac{L_0}{(a^2 + (h + \delta_y)^2)^{1/2}} \right]; \quad F_{NLG|NH}(\delta_y) = \frac{2C_{10}A}{L_0} (h + \delta_y) \left[ 1 - \frac{L_0^3}{(a^2 + (h + \delta_y)^2)^{3/2}} \right] \quad (61) \text{ e } (62)$$

$$\frac{dF_{NLG|LF}}{d\delta_y} = \frac{EA}{L_0} + \frac{EAh(h + \delta_y)}{(a^2 + (h + \delta_y)^2)^{3/2}} - \frac{EA(h\delta_y + a^2 + h^2)}{(a^2 + (h + \delta_y)^2)^{3/2}} \quad (63)$$

$$\frac{dF_{NLG|NH}}{d\delta_y} = \frac{2C_{10}A}{L_0} + \frac{6C_{10}AhL_0^2(h + \delta_y)}{(a^2 + (h + \delta_y)^2)^{5/2}} + \frac{2C_{10}AL_0^2(2\delta_y^2 - a^2 - h^2 + h\delta_y)}{(a^2 + (h + \delta_y)^2)^{5/2}} \quad (64)$$

Nas Figuras 7a e 7b são apresentados os gráficos obtidos pelo programa desenvolvido comparando com as soluções analíticas. Foi utilizado nesse exemplo o método incremental-iterativo de Newton-Raphson com controle de deslocamento.

**Figura 7 - Gráficos: a) força vs deslocamento vertical do nó 2; b) rigidez vs deslocamento vertical do nó 2.**



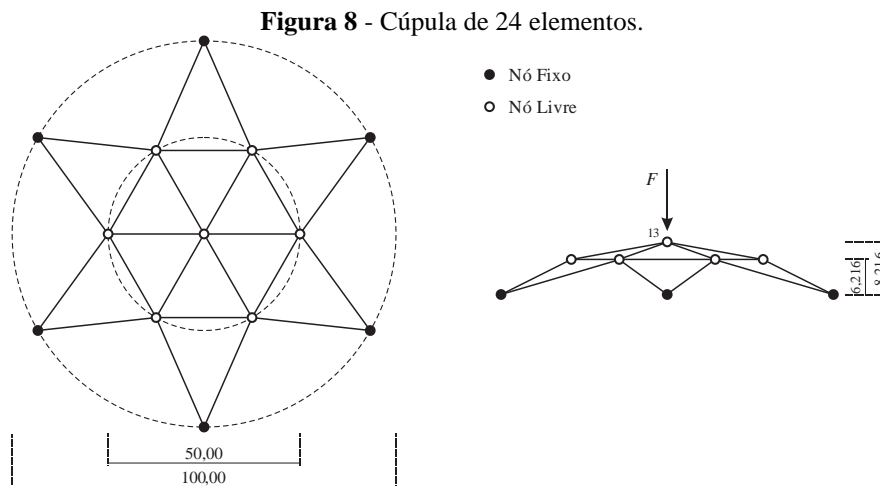
Fonte: Autores.

Como é possível observar, os resultados obtidos pelo programa estão em concordância com as soluções analíticas em todas as análises. Em relação as análises NLG|LF e NLG|NLF, é verificável que os gráficos de força e rigidez apresentam uma simetria no ponto em que  $\delta_y = -10$  cm, o que é compreensível, pois, se o nó 2 se deslocar para cima ou para baixo a partir desse ponto, a treliça exibirá o mesmo comportamento. Percebe-se também que, nos trechos em que a barra estava sendo comprimida ( $0 > \delta_y > -20$  cm) as análises LF e NLF são bem próximas, enquanto que, as soluções se distanciam nos demais deslocamentos quando a mesma é tracionada.

Nas análises LG, o comportamento da treliça tende a ser descrito de forma semelhante à curva tensão *vs* deformação do material considerado, conforme visto na Figura 6, onde o comportamento descrito pelos modelos hiperelásticos de Ogden N4 e Polinomial N2 se distanciaram dos demais modelos quando as barras são comprimidas. Em relação as análises LF e NLF dos modelos hiperelásticos, é notável que cada um dos modelos apresentaram uma rigidez inicial diferente, cujos valores eram os mesmos para as análises LG e NLG. Também é verificável, tanto na curva tensão *vs* deformação do material como no gráfico de rigidez *vs* deslocamento, que o modelo hiperelástico de Ogden N4 é o que apresenta rigidez inicial mais próxima da do modelo linear, e o modelo Polinomial N2 é o único que apresenta uma rigidez inicial superior à do modelo linear físico. No entanto, nota-se que para pequenos deslocamentos ( $1\text{ cm} > \delta_y > -1\text{ cm}$ ) os resultados das quatro análises são muito próximos, e assim, acabam adotando a análise LG|LF para simplificação dos cálculos nesses casos.

### 3.3 Exemplo 3 - cúpula de 24 barras

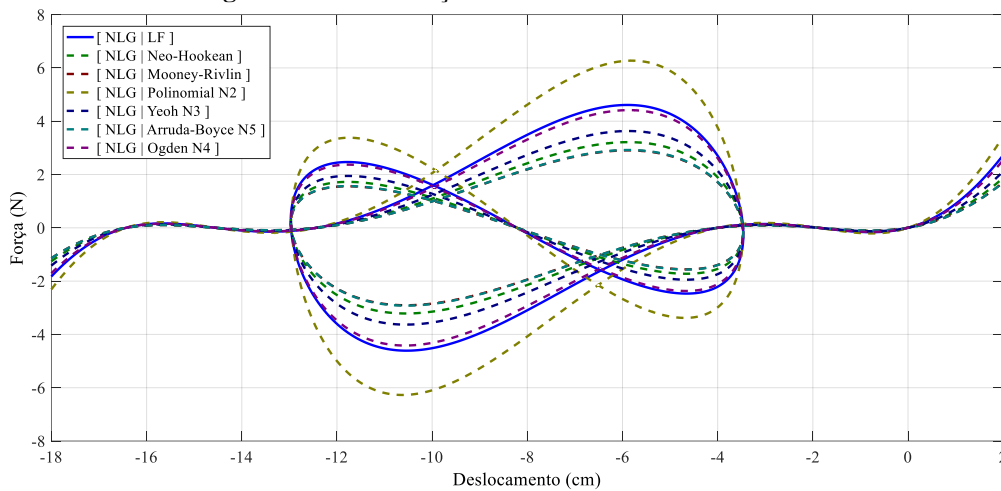
Na Figura 8 são apresentadas as vistas superior e lateral de uma cúpula de treliça em formato de estrela, cujas dimensões são dadas em centímetros. Essa estrutura de 24 elementos e 13 nós é uma treliça clássica da literatura científica sobre análises de treliças espaciais. Apareceu pela primeira vez em Hangai & Kawamata (1971) e foi analisada por diversos autores (Hill, et al., 1989, Blandford, 1996, Greco, et al., 2006).



Fonte: Autores.

Todas as barras possuem uma seção transversal de  $1,0\text{ cm}^2$  e a mesma rigidez, que varia de acordo com o modelo constitutivo. A treliça está submetida à uma força vertical no nó 13 em seu topo, onde os seis nós da base são fixos e os demais são livres. Foi traçado o caminho de equilíbrio completo utilizando o algoritmo do comprimento de arco de Riks-Wempner, com um total de 1100 ciclos, número máximo de iterações igual a 100, tolerância de  $10^{-4}$ , comprimento inicial do preditor  $\Delta l$  de 0,1 e número de iterações desejadas  $N_d$  igual a 1. Foi gerado o gráfico de força *vs* deslocamento vertical do nó central da cúpula (Figura 9), considerando o modelo elástico linear e os modelos hiperelásticos. Entende-se por caminho do equilíbrio completo, o caminho traçado da sua posição inicial até a posição oposta em relação ao plano que contém os seus nós fixos.

**Figura 9** - Gráfico força vs deslocamento do nó 13 em Z.



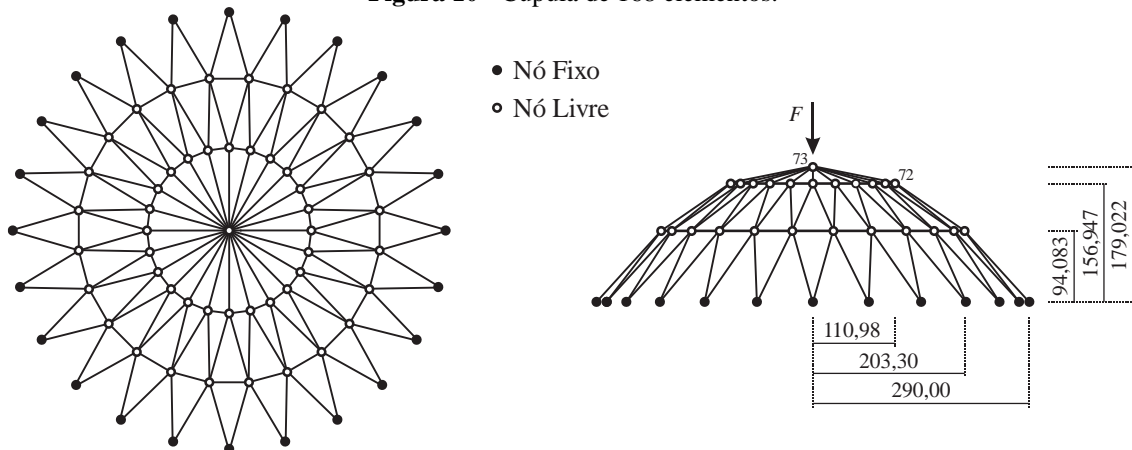
Fonte: Autores.

O caminho do equilíbrio é completo quando o deslocamento vertical do nó central atinge o dobro da altura da cúpula ( $-16,432$  cm), nesse ponto a cúpula está em sua posição oposta em relação ao plano que contém seus nós fixos. Para deslocamentos maiores que 0 e menores que  $-16,432$ , as barras da treliça (em sua maioria) são tracionadas.

### 3.4 Exemplo 4 - cúpula de 168 barras

A cúpula deste exemplo também se trata de uma treliça clássica muito utilizada em trabalhos de análises de treliças. Na Figura 10 são apresentadas a vistas superior e lateral da mesma, com unidades representadas em centímetros. Essa estrutura treliçada de 168 elementos e 73 nós apareceu pela primeira vez em Paradiso et al. (1979), sendo analisada por outros autores (Papadrakakis, 1981, Forde & Stiemer, 1987, Lacerda, 2014).

**Figura 10** - Cúpula de 168 elementos.

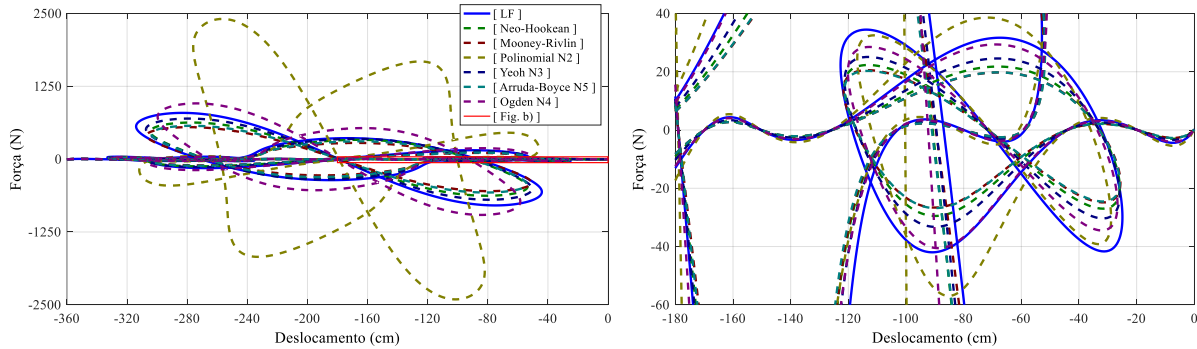


Fonte: Autores.

Todas as barras possuem uma seção transversal de  $1,0$  cm<sup>2</sup> e a mesma rigidez, que varia de acordo com o modelo constitutivo. A treliça está submetida à uma força vertical no nó 73 em seu topo, sendo os vinte e quatro nós da base fixos e os demais livres. Foi traçado o caminho de equilíbrio completo utilizando o algoritmo do comprimento de arco de Riks-Wempner, com um total de 5520 ciclos, número máximo de iterações igual a 100, tolerância de  $10^{-4}$ , comprimento inicial do preditor  $\Delta l$  de 2,0 e número de iterações desejadas  $N_d$  igual a 1. Ao traçar o caminho do equilíbrio completo, algumas regiões desse caminho

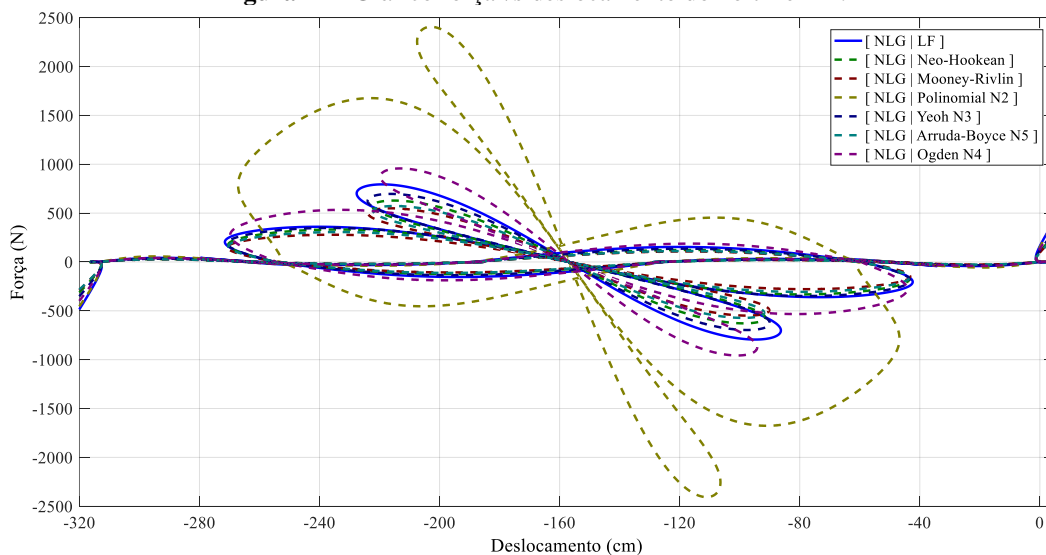
tornam-se difíceis de analisar devido à escala total apresentada. Para contornar isso e possibilitar a visualização dessas regiões do caminho de equilíbrio, foram gerados outros gráficos focados nesses trechos de difícil visibilidade. Foram gerados os gráficos de força vs deslocamento verticais do nó 73 da cúpula (nó central) e do nó 72, apresentados nas Figuras 11 e 12, respectivamente.

**Figura 11** - Gráfico força vs deslocamento do nó 73 em Z: a) caminho do equilíbrio; b) região em contorno na Fig. a).



Fonte: Autores.

**Figura 12** - Gráfico força vs deslocamento do nó 72 em Z.



Fonte: Autores.

Quando o deslocamento vertical do nó central atinge o dobro da altura da cúpula ( $-358,044$  cm), a cúpula está em sua posição oposta em relação ao plano que contém seus nós fixos. Para deslocamentos maiores que 0 e menores que  $-358,044$ , as barras da treliça (em sua maioria) são tracionadas.

### 3.5 Discussão dos exemplos 3 e 4

De um modo geral, é de fácil percepção que o modelo Polinomial N2 descreveu um comportamento mais distante dos demais modelos nos caminhos de equilíbrio das treliças analisadas, seguido pelo modelo de Ogden N4. Tal fenômeno está ligado ao fato de que, como visto na curva tensão vs deformação do material (Figura 6), o modelo Polinomial N2 prediz um comportamento do material que diverge rapidamente quando comprimido, e durante os caminhos de equilíbrio traçados nos exemplos, as barras das treliças (em sua maioria) são comprimidas.

No exemplo 3 (Figura 9), as diferenças entre os modelos hiperelásticos e o modelo linear não afetaram os deslocamentos, no qual o deslocamento do nó central é o mesmo para todos os modelos ao longo do caminho de equilíbrio. Contudo, no exemplo

4 (Figura 10 e 11) a diferença nos caminhos de equilíbrio afetaram os deslocamentos significativamente, principalmente no modelo Polinomial N2, que descreveu um caminho de equilíbrio com formato diferente dos demais modelos. Essas diferenças significativas aconteceram nos limites mais extremos do caminho de equilíbrio, no qual ocorreram maiores deformações dos elementos da treliça.

Em todos os modelos considerados, os caminhos de equilíbrio dos exemplos 3 e 4 possuem um ponto médio, que ocorre quando todas as barras da treliça estão no mesmo plano que contém os nós fixos, dessa forma, nesse ponto do caminho de equilíbrio as barras atingem sua deformação de compressão máxima. Esse ponto médio também se trata de um ponto de simetria, pois a partir deste, o caminho de equilíbrio traçado é o mesmo de antes, contudo, no sentido inverso. Vale ressaltar que isso aconteceu, pois, as forças foram aplicadas de forma simétrica nas treliças.

Como o método do comprimento de arco com restrição plana normal acompanha a trajetória do caminho de equilíbrio e foi utilizado o mesmo valor inicial do preditor e número de iterações desejadas para todos os modelos, o número de ciclos para traçar o caminho de equilíbrio completo foi diferente para cada modelo. O modelo que necessitou de um maior número de ciclos em todos os exemplos foi o modelo Polinomial N2, seguido pelo modelo de Ogden N4 e pelo modelo linear, a depender do grau de deformação da treliça. Os modelos Neo-Hookean, Mooney-Rivlin, Yeoh N3 e Arruda-Boyce N5 necessitaram de um menor número de ciclos em relação ao modelo elástico linear, pois seus caminhos de equilíbrio apresentaram menor comportamento em comparação com esse último.

#### 4. Conclusão

Foi desenvolvido um código computacional em linguagem MATLAB® para analisar treliças considerando as linearidades e não linearidades físicas e geométricas, onde o mesmo apresentou bom desempenho para descrever o comportamento das treliças quando comparado com as soluções analíticas. Além disso, verificou-se que a formulação posicional apresentou bom desempenho e praticidade no que diz respeito à implementação computacional.

Dentre os seis modelos hiperelásticos considerados, os modelos de Yeoh N3, Polinomial N2 e Ogden N4 apresentaram ótima precisão no ajuste das curvas tensão *vs* deformação das amostras, ou seja, esses modelos descreveram mais precisamente o comportamento mecânico do material hiperelástico submetido à tração uniaxial. Contudo, dentre esses modelos o mais preciso foi o de Ogden, onde até mesmo para  $N = 1$  apresentou boa proximidade.

Os caminhos de equilíbrio das treliças considerando os modelos hiperelásticos são condicionados ao ajuste/predição da curva tensão *vs* deformação do material, indicando a importância de resultados de ensaios experimentais de compressão e tração uniaxial de um mesmo material, para tornar possível o ajuste da curva tanto de tração como de compressão pelos modelos hiperelásticos.

Os modelos hiperelásticos descrevem um comportamento diferente dos elastômeros quando submetidos à tração ou compressão, apresentando um comportamento mais divergente quando comprimidos, onde, quanto maior for essa divergência, mais isso impactará a análise das treliças, pois resultará em diferenças significativas no comportamento das mesmas nos seus caminhos de equilíbrio.

Foi verificado que nos caminhos de equilíbrio das treliças encontrados pelo método de continuação do comprimento de arco de Riks-Wempner, as maiores diferenças entre os modelos hiperelásticos e o modelo elástico linear ocorreram nas configurações das treliças nos limites mais extremos do caminho de equilíbrio, nos quais apresentam maiores deformações dos elementos da estrutura treliçada.

Configuram-se como sugestões para futuras pesquisas a consideração do efeito de compressibilidade nos materiais, estudo e implementação da análise elasto-plástica com não linearidade geométrica, avaliação dos efeitos dinâmicos em treliças



considerando modelos hiperelásticos e comparação dos resultados de treliças compostas de materiais poliméricos ensaiadas experimentalmente com soluções numéricas não lineares.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## Referências

- Arruda, E. M., & Boyce, M. C. (1993). A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(2), 389–412. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90013-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90013-6)
- Becho, J. dos S. (2016). *Formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos para descrição do comportamento mecânico viscoelástico de fluência em vigas e estruturas de pórtico*. 136p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais. <http://hdl.handle.net/1843/BUBD-AAJDXJ>
- Belo, I. M. (2009). *Desenvolvimento da formulação corrotacional em elementos finitos de casca para a análise hiperelástica*. 219p. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina. <http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/93414>
- Blandford, G. E. (1996). Progressive failure analysis of inelastic space truss structures. *Computers & Structures*, 58(5), 981–990. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(95\)00217-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(95)00217-5)
- Coda, H. B. (2003). An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description. *XVII International Congress of Mechanical Engineering - COBEM*. November 10-14, São Paulo, SP. <https://abcm.org.br/anais/cobem/2003/html/pdf/COB03-0546.pdf>
- Fernandes, W. L., Araújo, V. A., & Greco, M. (2021). Contribuição ao estudo de medidas objetivas de deformação na Formulação posicional do método dos elementos finitos. *Anais do XXIV ENMC – Encontro Nacional de Modelagem Computacional e XII ECTM – Encontro de Ciências e Tecnologia de Materiais*. Outubro 13-15. <https://www.researchgate.net/publication/356904359>
- Forde, B. W. R., & Stiemeier, S. F. (1987). Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. *Computers & Structures*, 27(5), 625–630. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90078-2](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90078-2)
- Greco, M., Gesualdo, F. A. R., Venturini, W. S., & Coda, H. B. (2006). Nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42(12), 1079–1086. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2006.04.007>
- Greco, M., & Costa, L. J. R. da. (2012). Discussion on “The logarithmic strain measure applied to the nonlinear positional formulation for space truss analysis” [Finite Element in Analysis and Design 45 (2009) 632–639] and “Nonlinear positional formulation for space truss analysis” [Finite Element in Analysis and Design 42 (2006) 1079–1086]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 52, 93–95. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2011.12.002>
- Gomes, G. C. (2019). *Análise de formulação não Linear de Elementos Finitos para cascas com e sem curvaturas iniciais com materiais hiperelásticos*. 129p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia. <http://repositorio.ufba.br/ri/handle/ri/31406>
- Hangai, Y., & Kawamata, S. (1971). Nonlinear analysis of space frames and snap-through buckling of reticulated shell structures. *IASS Pacific Symp. Part II on Tension Structures and Space Frames*. Tokyo and Kyoto.
- Hill, C. D., Blandford, G. E., & Wang, S. T. (1989). Post-Buckling Analysis of Steel Space Trusses. *Journal of Structural Engineering*, 115(4), 900–919. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1989\)115:4\(900\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1989)115:4(900))
- Hoss, L. (2009). *Modelos constitutivos hiperelásticos para elastômeros incompressíveis: ajuste, comparação de desempenho e proposta de um novo modelo*. 315p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. <http://hdl.handle.net/10183/16310>
- Lacerda, E. G. M., Maciel, D. N., & Scudelari, A. C. (2013). Positional finite element method applied to nonlinear geometric plane trusses. *XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, ABMEC, Pirenópolis, GO, Brazil, November 10-13. <https://www.researchgate.net/publication/263964771>
- Lacerda, E. G. M. (2014). *Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional*. 107p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. <https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/14861>
- Mafaldo, J. G., Silva Filho, J. N. da, Marcelino, K. A., Maciel, D. N., & Coutinho, P. M. (2022). Analysis of a straight free-standing stair in reinforced concrete through analytical and numerical models via Finite Element Method. *Research, Society and Development*, 11(8). <https://doi.org/10.33448/rsd-v11i8.30842>
- Marczak, R. J., & Iturrioz, I. (2006). *Caracterização do comportamento de materiais hiperelásticos para Simulação Numérica*. Projeto de Pesquisa, SENAI - Departamento Regional do Rio Grande do Sul. <https://www.senairs.org.br/sites/default/files/documents/caracterizacao-de-comportamento-de-materiais-hiperelásticos.pdf>
- Miyazaki, J. P. de L., Souza, L. A. F. de, & Martins, C. H. (2020). Análise não linear de treliças com a formulação corrotacional de elementos finitos e diferentes medidas de deformações. *Revista Tecnológica - Universidade Estadual de Maringá*, 29(2), 499-515. <https://doi.org/10.4025/revtecnol.v29i2.52237>
- Mooney, M. (1940). A Theory of Large Elastic Deformation. *Journal of Applied Physics*, 11(9), 582–592. <https://doi.org/10.1063/1.1712836>



- Ogden, R. W. (1972). Large Deformation Isotropic Elasticity - On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 326(1567), 565–584. <https://doi.org/10.1098/rspa.1972.0026>
- Papadrakakis, M. (1981). Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods. *Computers & Structures*, 14(5-6), 393–402. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90059-6](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90059-6)
- Paradiso, M., Reale, E., & Tempesta, G. (1979). Nonlinear post-buckling analysis of reticulated dome structures. *Proc. IASS World Congress on Shell and Spatial Structures*. Madrid.
- Parson, J. P. (2008). *Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional*. 232p. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. <https://doi.org/10.11606/D.18.2008.tde-17042008-084851>
- Paula, J. P. A. de, Lalo, D. F., Almeida, A. M. de, & Greco, M. (2019). Comparative curve fitting through hyperelastic constitutive models for several formulations of carbonblack-filled rubber vulcanizates. *XL Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, ABMEC, Natal/RN, Brazil, November 11-14. <https://www.researchgate.net/profile/Marcelo-Greco-2/publication/338127242>
- Rezende, R. C. (2020). *Comportamento mecânico de dispositivos de dissipação de energia fabricados com elastômeros para vigas de pontes*. 108p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais. [http://pos.dees.ufmg.br/diss\\_defesas\\_detalhes.php?aluno=1353](http://pos.dees.ufmg.br/diss_defesas_detalhes.php?aluno=1353)
- Riks, E. (1972). The application of Newton's methods to the problems elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, 39(4), 1060-1065. <https://doi.org/10.1115/1.3422829>
- Riks, E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures*, 15(7), 529-551. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(79\)90081-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(79)90081-7)
- Rivlin, R. S., & Saunders, D. W. (1951). Large elastic deformations of Isotropic Materials VII. Experiments on the deformation of rubber. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 243(865), 251–288. <https://doi.org/10.1098/rsta.1951.0004>
- Suzuki, J. L. (2013). *Aplicação do Método dos Elementos Finitos de Alta Ordem em hiperelasticidade com dano isotrópico*. 81p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. <https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2013.905556>
- Treloar, L. R. G. (1975). *The Physics of Rubber Elasticity*, 3rd edition. Oxford: Clarendon Press. [https://www.eng.uc.edu/~beaucag/Classes/Properties/Books/The%20physics%20of%20rubber%20elasticity%20\\_%20by%20L.R.G.%20Treloar-Oxford%20University%20Press,%20USA%20\(2005\).pdf](https://www.eng.uc.edu/~beaucag/Classes/Properties/Books/The%20physics%20of%20rubber%20elasticity%20_%20by%20L.R.G.%20Treloar-Oxford%20University%20Press,%20USA%20(2005).pdf)
- Vieira, A. L., Leal, V., & Silveira, M. E. (2010). Avaliação de modelos hiperelásticos na simulação numérica de um suporte de motor automotivo. *Nono Simpósio de Mecânica Computacional*, ABMEC, Universidade Federal de São João Del-Rei, Maio 26-28. <http://docplayer.com.br/43438701-Avaliacao-de-modelos-hiperelásticos-na-simulacao-numerica-de-um-suporte-de-motor-automotivo.html>
- Wempner, G. A. (1971). Discrete approximation related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7(11), 1581–1599. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(71\)90038-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(71)90038-2)
- Yeoh, O. H. (1990). Characterization of Elastic Properties of Carbon-Black-Filled Rubber Vulcanizates. *Rubber Chemistry and Technology*, 63(5), 792–805. <https://doi.org/10.5254/1.3538289>