

## As contribuições do uso de lápis e papel para o ensino-aprendizagem de geometria no ensino médio

The contributions of the use of pencil and paper for the teaching and learning of geometry in high school

Los aportes de uso de lápiz y papel para la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la educación secundaria

Recebido: 12/09/2022 | Revisado: 19/09/2022 | Aceito: 19/09/2022 | Publicado: 21/09/2022

**Thiago César de Pádua Rosa**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8226-7520>

Instituto Federal do Espírito Santo, Brasil

E-mail: [thiagocesar\\_padua@hotmail.com](mailto:thiagocesar_padua@hotmail.com)

**Rony Cláudio de Oliveira Freitas**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9044-3109>

Instituto Federal do Espírito Santo, Brasil

E-mail: [freitasrco@gmail.com](mailto:freitasrco@gmail.com)

### Resumo

O presente artigo é um recorte da pesquisa de mestrado intitulada “Do lápis e papel à realidade aumentada: uma proposta de ensino de visualização geométrica”, que tem como objetivo analisar as possíveis contribuições de uma proposta de ensino de visualização geométrica pautado na investigação matemática e utilizando diferentes recursos didáticos. Aqui, analisamos as contribuições de atividades desenvolvidas apenas com lápis e papel para o ensino-aprendizagem de geometria. Participaram desta pesquisa 16 estudantes da 3ª série do ensino médio, residentes em Guaçuí – ES. O uso deste recurso despertou pouco o interesse dos estudantes. As limitações do material (representação em 2D de objetos 3D) dificultou, por exemplo, a observação de interseções entre as figuras. A atividade permitiu contemplar as seguintes habilidades: percepção figura de fundo; rotação mental e discriminação visual. As seguintes habilidades não foram contempladas: constância perceptiva; percepção de posições espaciais e percepção de relações espaciais. Por fim, atividades com lápis e papel apresentam como vantagens: serem de fácil execução; estimularem a criatividade dos estudantes e ajudarem a desenvolver a habilidade de desenho pelos estudantes. Concluímos que o uso de um recurso simples, como lápis e papel, pode contribuir para o desenvolvimento de importantes habilidades nos alunos.

**Palavras-chave:** Ensino; Visualização geométrica; Geometria; Investigação matemática; Lápis e papel.

### Abstract

This article is an excerpt from the master's research entitled "From pencil and paper to augmented reality: a proposal for teaching geometric visualization", which aims to analyze the possible contributions of a proposal for teaching geometric visualization based on mathematical and scientific research. using different teaching resources. Here, we analyze the contributions of activities developed only with pencil and paper for the teaching and learning of geometry. Participated in this research 16 students from the 3rd grade of high school, living in Guaçuí - ES. The use of this resource aroused little interest among students. Material limitations (2D representation of 3D objects) made it difficult, for example, to observe intersections between figures. The activity allowed contemplating the following skills: figure-ground perception; mental rotation and visual discrimination. The following skills were not covered: perceptive constancy; perception of spatial positions and perception of spatial relationships. Finally, activities with pencil and paper have the following advantages: they are easy to perform; stimulate students' creativity and help to develop students' drawing skills. We conclude that the use of a simple resource, such as pencil and paper, can contribute to the development of important skills in students.

**Keywords:** Teaching; Geometric visualization; Geometry; Mathematical investigation; Pencil and paper.

### Resumen

O presente artículo é um recorte da pesquisa de mestrado intitulada “Do lápis e papel à realidade aumentada: uma proposta de ensino de visualização geométrica”, que tem como objetivo analisar as possíveis contribuições de uma proposta de ensino de visualização geométrica pautado na investigação matemática e utilizando diferentes recursos didáticos. Aqui, analisamos como contribuciones de actividades desarrolladas apenas con lapis y papel para o ensino-aprendizagem de geometria. Participaram desta pesquisa 16 estudantes da 3ª série do ensino médio, residentes em Guaçuí – ES. O uso deste recurso despertou pouco o interesse dos estudantes. Como las limitaciones del material

(representación en 2D de objetos 3D) dificultan, por ejemplo, una observación de intersecciones entre figuras. A actividades permitió contemplar as siguientes habilidades: percepción figura de fundo; rotación mental y discriminación visual. Como siguientes habilidades no fueran contempladas: constancia perceptiva; percepción de posiciones espaciales y percepción de relaciones espaciales. Por fim, atividades com lápis e papel apresentam como vantagens: serem de fácil execução; estimularem a criatividade dos estudantes e ajudarem a desenvolver a skille de desenho pelos estudantes. Concluimos que o uso de um recurso simples, como lápis e papel, puede contribuir para o desarrollar habilidades importantes en nuestros alumnos.

**Palabras clave:** Enseñanza; Visualización geométrica; geometría; Investigación matemática; Lápis y papel.

## 1. Introdução

Não é de hoje que a geometria é pouco estudada dentro das escolas, conforme mostram os trabalhos de Pavanello (1993), Gazire (2000) e Fonseca (2001). Lorenzato (2006) afirma que existe uma indiferença com a geometria dentro das salas de aula. Silva et al. (2016, p.4), afirmam que “o ensino e a aprendizagem de geometria, no âmbito escolar, tem apresentado bastante dificuldades, isto é, os professores têm dificuldade para seu ensino e os alunos, conseqüentemente, para sua aprendizagem”.

É razoável supor que, se o professor possui dificuldades em ensinar conceitos geométricos, seus alunos terão dificuldades em aprender. Marangoni et al. (2008), trabalhando com 14 professores que lecionavam no ensino fundamental e médio, descobriram fragilidades no entendimento do professor a respeito de conceitos geométricos. Esses professores certamente terão dificuldade em ensinar. Os autores concluem que é preciso investir mais nos conteúdos e conceitos geométricos ao longo da formação acadêmica do professor, além de proporcionar uma maior contextualização da geometria.

Entre os conteúdos geométricos apontados como relevantes na formação de professores e estudantes, destacamos a visualização. Tal conteúdo tem sido apontado como essencial, pois “permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (BRASIL, 1999, p. 39).

Sobre a visualização geométrica, Ponte et al. (2007) afirmam:

A visualização engloba capacidades relacionadas com a forma como os alunos percebem o mundo que os rodeia e envolve observação, manipulação e transformação de objetos e as suas representações e a interpretação de relações entre os objetos e entre estes e as suas representações. O sentido espacial envolve ainda as noções de orientação e movimento, desempenhando um papel importante na percepção das relações espaciais (Ponte et al, 2007, p. 22).

Silva et al. (2016, p. 3) afirmam que “(...) a geometria permite o desenvolvimento de outros tipos de raciocínio, relacionados com a manipulação e visualização, do senso estético, da criatividade, enfatiza assim, aspectos não quantitativos do raciocínio matemático”. Ou seja, essa abordagem não se limita a benefícios restritos à matemática, mas contribui para o desenvolvimento de outras habilidades.

No entanto, para além da simples observação, defendemos uma proposta que possa ser vinculada a uma abordagem metodológica capaz de instigar o aluno, incentivando-o a levantar hipóteses e realizar testes, ou seja, sair da posição de expectador, contribuindo ativamente para a construção do próprio conhecimento. Nesse contexto, as atividades investigativas, segundo Ponte et al. (2007), constituem uma metodologia adequada, pois são compostas de atividades abertas que levam o aluno à proposição de conjecturas e realização de testes, criando conhecimento em detrimento de absorção passiva.

## 2. Fundamentação Teórica

Sobre o termo visualização, Gutiérrez (1996) afirma que:

Não há acordo geral sobre a terminologia a ser usada neste campo: pode acontecer que um autor utilize, por exemplo, o termo “visualização” e outro autor use “pensamento espacial”, mas descobrimos que eles estão compartilhando o mesmo significado para termos diferentes. (...) Essa bagunça aparente é meramente um reflexo da diversidade de áreas onde a visualização é considerada relevante e há variedade de especialistas interessados (Gutiérrez, 1996, p. 4).

O estudo da visualização no contexto escolar é de grande relevância, especialmente nos assuntos relacionados à geometria espacial. No entanto, ainda é comum que sejam abordados tendo como referência apenas o livro didático. Quando se usa o livro didático, o maior desafio do aluno é construir uma imagem “tridimensional a partir de uma figura bidimensional estática impressa na página de um livro ou desenhada no quadro negro pelo professor” (BORTOLOSSI, 2020, p. 106). Além disso, a representação de objetos 3D em 2D gera deformação dos ângulos, o que pode levar a interpretações errôneas. Ainda, a representação 2D de alguns objetos 3D podem não ser adequadas, como, por exemplo, da Pirâmide de Huffman (BORTOLOSSI, 2020).

Segundo Becker (2009):

Quando se trabalha Geometria Espacial, é fundamental que se tenha em mente a visualização. A capacidade de visualização é uma habilidade básica nesse campo de conhecimento. Uma pessoa que tem dificuldades em visualização terá problemas em entender contextos gráficos apresentados nos livros e apresentará dificuldades em expressar suas próprias ideias (Becker, 2009 p. 27).

Em nosso cotidiano dentro da sala de aula, percebemos que os alunos possuem grande dificuldade na habilidade de visualização, que tem muita importância para o pensamento geométrico.

Sobre a aplicabilidade da visualização para o pensamento geométrico, os PCNs afirmam que:

O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades (BRASIL, 1999, p. 127).

Ainda, segundo os PCNs, os alunos devem ser incentivados “a identificar posições relativas dos objetos, a reconhecer no seu entorno e nos objetos que nele se encontram formas distintas, tridimensionais e bidimensionais, planas e não planas, a fazer construções, modelos ou desenhos do espaço de diferentes pontos de vista e descrevê-los” (BRASIL, 1999, p.128).

Segundo Fainguelernt (1999, *apud* BORSOI, 2016), o pensamento espacial e o raciocínio geométrico são estimulados pela visualização. De acordo com Becker (2009), a capacidade de visualização é uma habilidade fundamental para o ensino de geometria. Segundo ele, quando uma pessoa possui dificuldade em visualização, provavelmente terá dificuldades em compreender os contextos gráficos apresentados nos livros didáticos, e isso será um obstáculo para apresentar suas ideias.

O autor defende que, devido ao fato de os livros didáticos serem planos e estáticos, há uma perda de informações na representação de um objeto, principalmente na geometria espacial. Sendo assim, quando o aluno vê, por exemplo, a representação de um sólido geométrico em um livro, deve ter a capacidade de restaurar essas informações que foram perdidas.

Becker (2009) ainda afirma que:

É fundamental que o aluno adquira e desenvolva habilidades que o permitam entender e interpretar diferentes tipos de representações bidimensionais de objetos tridimensionais, ou seja, habilidades que permitam ao aluno criar, mover, transformar e analisar imagens mentais de objetos tridimensionais geradas por uma informação dada através de um desenho plano (Becker, 2009, p. 27).

A interpretação de objetos em duas ou três dimensões permite aos alunos a representação correta desses objetos. Esta representação está associada com leitura e interpretação de mapas, localização espacial e construção de sólidos geométricos, onde é possível elaborar diversas atividades aproximando esses conteúdos.

Os currículos escolares da educação infantil até o ensino médio abrangem o ensino e aprendizagem dos conceitos geométricos. O perfeito desenvolvimento destes conceitos não pode ser dar sem a visualização espacial. Segundo Matos e Gordo (1993):

A visualização espacial, em particular, é simultaneamente facilitadora de uma aprendizagem da Geometria, e desenvolvida pelas experiências geométricas na sala de aula. Engloba um conjunto de capacidades relacionadas com a forma como os alunos percebem o mundo que os rodeia, e com a sua capacidade de interpretar, modificar e antecipar transformações dos objetos (Matos & Gordo, 1993, p. 13).

Gutiérrez (1996), considera “visualização” em matemática como “o tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, mentais ou físicos, realizada para resolver problemas ou provar propriedades” (p. 9). Para ele, a visualização é integrada por quatro elementos principais: imagens mentais, representações externas, processos de visualização e habilidades de visualização. A Tabela 1 traz as definições dos elementos principais que integram a visualização, segundo Gutiérrez (1996).

**Tabela 1:** Definições dos elementos principais que integram a visualização

ELEMENTOS PRINCIPAIS	DEFINIÇÕES
Imagens mentais	Qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais.
Representações externas	Qualquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo imagens, desenhos, diagramas, etc. que ajudam a criar ou transformar imagens mentais e fazer raciocínio visual.
Processos de visualização	Uma ação mental ou física em que imagens mentais estão envolvidas.
Habilidades de visualização	Habilidades que um sujeito deve adquirir e desenvolver para realizar os <i>processos</i> necessários, com as <i>imagens mentais</i> específicas de um dado problema.

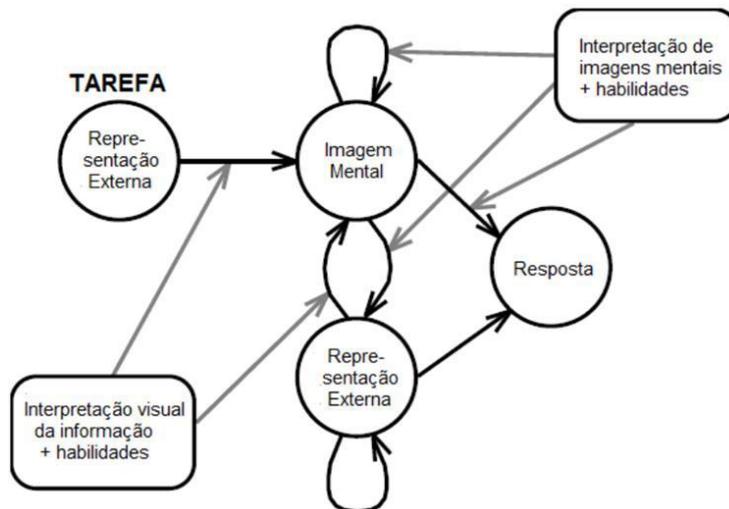
Fonte: Gutiérrez (1996), tradução nossa.

Para Gutiérrez (1996), os indivíduos devem desenvolver um conjunto de “habilidades” de visualização para realizar os processos necessários com imagens mentais específicas para um determinado problema. Dependendo das características do problema matemático a resolver e das imagens criadas, os alunos deverão poder escolher entre várias capacidades visuais. Essas habilidades podem ter fundamentos bastante diferentes, sendo os principais:

1. **Percepção figura de fundo (PFF):** a capacidade de identificar a figura fora de seu contexto.
2. **Constância perceptiva (CP):** A capacidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou em uma imagem mental) são independentes de tamanho, cor, textura ou posição, e não se confundem quando um objeto ou imagem é percebido em diferentes orientações.
3. **Rotação mental (RM):** A capacidade de produzir imagens mentais dinâmicas e de visualizar uma configuração em movimento.
4. **Percepção de posições espaciais (PPE):** A capacidade de relacionar um objeto, imagem ou imagem mental para si mesmo.
5. **Percepção de relações espaciais (PRE):** Capacidade de relacionar vários objetos, imagens e/ou imagens mentais umas com as outras, ou simultaneamente para si mesmo.
6. **Discriminação visual (DV):** Capacidade de comparar vários objetos, imagens, e/ou imagens mentais para identificar semelhanças e diferenças entre eles.

O diagrama representado na Figura 1 resume os passos observados ao usar a visualização para resolver uma tarefa. O aluno interpreta a tarefa solicitada na forma de uma representação externa e cria uma imagem mental. A imagem inicialmente criada é responsável por iniciar o raciocínio visual, e nesse processo o aluno mobiliza diferentes habilidades visuais, as quais sofrem variação a depende da tarefa solicitada. Até o aluno alcançar a resposta final pode haver a elaboração de novas imagens mentais ou representações externas.

**Figura 1:** Principais elementos de visualização integrando a solução de uma tarefa matemática.



Fonte: Elaborado pelo pesquisador (2021) baseado em Gutiérrez (1996, p. 11).

Além de lidar com as limitações do material didático, o professor precisa considerar as dificuldades do aluno quando se trata de construções. Interessantemente, os alunos conseguem identificar seus erros, porém, mesmo refazendo a construção, nem sempre conseguem superá-los, devido, principalmente, a dois tipos de dificuldades: conceitual (não compreende as propriedades da representação) e técnica (não possui as habilidades necessárias para a representação da figura geométrica) (GUTIÉRREZ, 1998, p. 209).

Ainda segundo Gutiérrez (1998), as figuras tradicionais podem inibir o potencial do aluno em representar figuras geométricas, justamente por suas limitações e comprometimentos de visualização. As representações planas das figuras geométricas implicam em perda de informações, que só podem ser acessadas com a observação dos sólidos em três dimensões. A visualização em 3D, portanto, é extremamente necessária para que o aluno possa abstrair as formas de seu contexto original e reelaborá-las em imagens mentais próprias, assimilando suas propriedades e conceitos.

Indo um pouco além da simples visualização, é pertinente proporcionar ao aluno uma experiência que fuja da tradicional resolução de questões. Neste contexto, o uso de atividades investigativas pode constituir uma estratégia que incentiva a formulação e teste de hipóteses, tornando o aluno ativo na construção do próprio conhecimento e fugindo da resolução de exercício como mera repetição.

### 3. Metodologia

Esta é uma pesquisa qualitativa e de caráter descritivo. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa é caracterizada por: ambiente natural como a fonte direta de obtenção dos dados, tendo o investigador como instrumento principal; caráter descritivo; interesse do investigador nos processos mais do que nos resultados ou nos produtos; análise indutiva dos dados obtidos e, finalmente, possuir o significado como elemento norteador da abordagem.

Ainda que se adote uma abordagem qualitativa, contudo, nada impede que o pesquisador quantifique dados em determinados momentos, buscando ampliar os elementos componentes da pesquisa (Minayo, 1994). A abordagem qualitativa é muito utilizada na pesquisa em educação matemática, pois não se ocupa com quantidades e estatísticas, mas procura elucidar os significados e estabelecer relações entre os dados obtidos (Fonseca, 2014).

Durante o desenvolvimento da atividade, os estudantes fizeram a atividade utilizando apenas papel, lápis, borracha e régua. Foi elaborado e aplicado um roteiro didático, composto pela atividade descrita resumidamente a seguir:

*Observe objetos do seu dia a dia. Represente-os e realize intersecções diversas entre o plano e os sólidos representados e descreva o que descobriu.*

A obtenção dos dados se deu a partir de oficina desenvolvida para este fim, com a participação de estudantes do ensino médio da EEEFM Antonio Carneiro Ribeiro, localizada em Guaçuá, Espírito Santo. Para a realização dessa pesquisa, optou-se por trabalhar com um grupo de 20 estudantes da 3ª série do ensino médio. A atividade foi desenvolvida de forma presencial, com a entrega de material impresso. A oficina teve duração de 3 aulas de 50 minutos (total de 2 horas e meia).

Para não identificar os estudantes participantes, eles serão citados um código formado por uma letra seguida de um número. A letra será referente ao seu grupo durante o desenvolvimento das atividades.

No primeiro encontro (dia 09/02/2022), os estudantes foram divididos em 5 grupos cuja formação foi mantida em todos os encontros (A, B, C D e Antônio). Eles ficaram livres para escolherem os membros de cada grupo de acordo com suas afinidades pessoais. Como eram 20 estudantes, cada grupo teve a participação de 4 indivíduos, que posicionaram as mesas e cadeiras próximas um do outro, contudo, mantendo o distanciamento mínimo exigido pelos protocolos de segurança contra a Covid-19.

Como nem todos os 20 estudantes participaram dos três encontros, a análise dos resultados será feita considerando apenas aqueles que participaram de todos os encontros. Assim, participaram da presente pesquisa um total de 16 estudantes, como podemos observar na Tabela 2. Os nomes dos estudantes foram substituídos por siglas correspondentes aos grupos aos quais pertenciam durante o desenvolvimento deste estudo, buscando preservar o anonimato deles.

**Tabela 2** - Organização dos instrumentos de pesquisa

GRUPO	ESTUDANTES
A	$A_1$ e $A_2$
B	$B_1$ , $B_2$ e $B_3$
C	$C_1$ , $C_2$ e $C_3$
D	$D_1$ , $D_2$ , $D_3$ e $D_4$
E	$E_1$ , $E_2$ , $E_3$ e $E_4$

Fonte: Elaborado pelo pesquisador a partir de dados documentais.

Na primeira etapa do roteiro, os estudantes foram informados da pesquisa da qual fizeram parte, e assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE, o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido – TALE e o Termo de cessão de imagem e voz para fins educacionais. Ficaram cientes do cronograma, com os dias e horários dos encontros presenciais/oficinas para a execução das tarefas. Após a apresentação, iniciamos um breve estudo para relembrar os elementos principais de geometria: ponto, aresta, vértice, reta, semirreta, plano, área, polígonos, intersecção, dentre outros.

Os estudantes receberam a atividade impressa. Esta é a etapa da aplicação das atividades do roteiro didático propriamente dita. Todo o desenvolvimento foi filmado e gravado para ser analisado com calma na hora de analisar os dados. Os estudantes realizaram a atividade proposta utilizando apenas lápis e papel. Eles receberam uma folha com a atividade impressa e papéis em branco para fazerem anotações e o desenvolvimento da atividade.

A autoavaliação do professor e a avaliação dos estudantes foram feitas em todas as etapas, conforme proposto por Fonseca et al. (1999). Tratou-se de uma importante etapa, pois ofereceu o feedback necessário para uma melhor compreensão dos benefícios e das limitações da abordagem proposta nesta pesquisa.

#### **4. Resultados e Discussão**

No início do Encontro 1, realizado no dia 09/02/2022, os estudantes se dividiram em grupos, conforme representado na Tabela 2. Após a divisão dos grupos, a atividade foi escrita no quadro e cada grupo começou a discutir as questões.

Cada um dos alunos recebeu uma folha de respostas, e foram orientados a fazerem desenhos e anotações que julgassem necessários para a resolução das questões propostas. A intencionalidade do uso futuro dos registros para o desenvolvimento da pesquisa foi reforçada, incentivando os alunos a registrarem com o maior número possível de detalhes o processo de resolução das questões. Os alunos foram orientados, também, a discutirem “dentro do grupo” qualquer dúvida antes de perguntarem ao professor, como forma de evitar a busca por respostas diretas. Neste momento inicial, foi incentivada a discussão dentro do próprio grupo. Enquanto os alunos resolviam as questões, procuramos alternar a atenção entre os grupos, mediando as discussões sempre que necessário. Mesmo diante de todo o incentivo à discussão em grupo, alguns alunos se mostraram bastante resistentes à proposta, uma vez que estão acostumados ao exercício com respostas fechadas, comumente aplicados em aulas de matemática. Esses alunos foram incentivados a buscar por soluções por meio de exemplos diferentes daqueles da atividade, evitando respostas diretas.

A atividade desse encontro foi feita utilizando apenas lápis e papel. O intuito foi verificar as potencialidades e limitações do desenvolvimento das atividades propostas sem a utilização de qualquer recurso concreto ou tecnologia digital, ou seja, simulando a forma como normalmente a geometria é trabalhada em aulas tradicionais, assim como a representação dos sólidos geométricos comumente encontrados nos livros didáticos. O uso do lápis e do papel para a representação de figuras 3D provoca uma redução da capacidade de visualização do sólido, que não pode ser rotacionado para inspeção de sua totalidade de faces e ângulos. Essa limitação imposta pela representação de figuras 3D em 2D pode oferecer um interessante primeiro olhar sob as dificuldades dos alunos na resolução das questões, criando subsídios para posterior comparação com representações verdadeiras em 3D, tanto com o uso de material concreto, quanto com o emprego de tecnologias digitais, como é o caso de softwares.

Ao final da atividade, conversamos com os estudantes, incentivando uma reflexão sobre o processo investigativo que foi desenvolvido nesse primeiro encontro, suas dificuldades e facilidades. Além disso, nesse momento, incentivamos que os grupos compartilhassem suas percepções sobre a atividade desenvolvida.

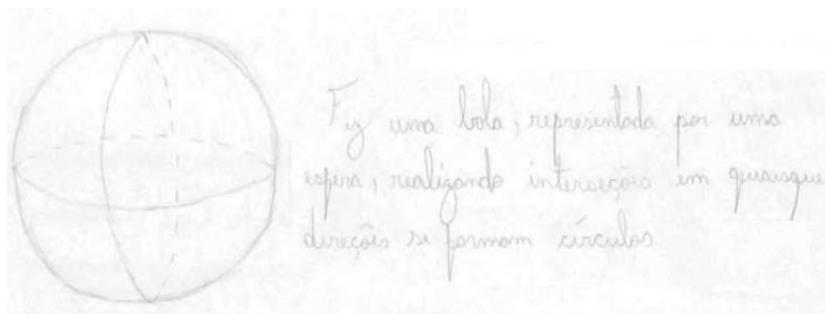
Passada a resistência inicial, percebemos que os estudantes se envolveram verdadeiramente com a atividade, a qual constituiu um momento incomum para eles, que nunca haviam participado de uma pesquisa de mestrado antes, e se mostraram bastante motivados e empenhados em colaborar. Conforme planejado, o encontro começou às 13h e encerrou às 15h 30min.

As respostas dos sujeitos participantes da pesquisa foram transcritas literalmente neste documento, assim como suas falas e demais produções obtidas durante os encontros, sem qualquer tipo de modificação ou correção por parte do pesquisador.

Dentre as 18 respostas dadas pelos estudantes, escolhemos 6 que apresentam elementos importantes para tratarmos em nossa análise.

A partir de uma análise das produções registradas pelos participantes nas folhas de respostas, observamos que 7 deles ( $A_1, B_1, B_3, C_1, D_3, D_4$  e  $E_2$ ) desenharam uma bola de futebol para representar uma esfera e um deles ( $B_2$ ) desenhou uma bola de sorvete. A Figura 2 mostra o desenho feito pelo estudante  $A_1$ .

**Figura 2** - Resposta elaborada pelo estudante  $A_1$ .



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Percebemos que o estudante, ao representar a esfera, tem noções de perspectiva, pois desenhou o traçado da frente da esfera com linhas contínuas, e na parte de trás utilizou linhas pontilhadas. Por convenção, linhas contínuas e pontilhadas são usadas para representar os lados da frente e de trás de um sólido, respectivamente. Embora não tenha desenhado a intersecção entre o sólido e o plano, o estudante justificou, por meio da língua natural, que as intersecções entre planos e a esfera formam círculos.

Em certo momento, durante a realização da atividade, o estudante  $A_1$  se mostrou pensativo a respeito das intersecções, e concluiu que a figura formada na intersecção sempre seria um círculo, como registrado em um trecho de conversa transcrita abaixo:

**$A_1$ :** Professor, a intersecção sempre vai formar um círculo!

**PROFESSOR:** Como você concluiu isso?

**$A_1$ :** Não sei explicar professor, mas dá pra perceber, pois a esfera é um sólido todo igual se você for virando pra qualquer lado.

**PROFESSOR:** E qual a diferença entre as figuras encontradas?

**$A_1$ :** São iguais, a única diferença é que os círculos tem tamanho diferentes.

**PROFESSOR:** Qual o tamanho máximo que você pode encontrar?

**$A_1$ :** Quando o plano corta no meio dessa esfera.

**PROFESSOR:** E quando você vai movendo esse plano pra baixo?

**$A_1$ :** Os círculos vão diminuindo.

**PROFESSOR:** Diminuindo até quanto?

**$A_1$ :** Até ficar um círculo bem pequenininho.

**PROFESSOR:** E se esse plano tangenciasse o polo da esfera, essa intersecção receberia algum nome específico?

**$A_1$ :** Não.

Quando o estudante diz que a esfera é um sólido todo igual, ele utilizou a habilidade de rotação mental (RM), conforme visto por Gutiérrez (1996), pois produziu imagens mentais dinâmicas, visualizando uma configuração em movimento. Ao afirmar que a intersecção entre planos esfera sempre vai formar um círculo, ele também demonstra a habilidade de percepção figura de

fundo (PFF), conforme dito pelo mesmo autor, pois ele consegue visualizar mentalmente o círculo como intersecção do plano com a esfera.

Por fim, percebe-se que o aluno utilizou a habilidade de discriminação visual (DV) pois conseguiu comparar as diferenças entre os tamanhos dos círculos formados nas intersecções entre os planos e a esfera. Podemos notar, também, que o estudante demonstrou possuir dificuldade em determinados conceitos relacionados à geometria, como a definição de ponto, por exemplo. Nesse caso, na intersecção do plano com a esfera não se forma um círculo, mas um ponto.

Os demais estudantes demonstraram dificuldades em representar a esfera em perspectiva, desenhando as linhas da frente da esfera com linha pontilhada.

Essas dificuldades apresentadas pelos estudantes são justificáveis, uma vez que essa habilidade de visualização não é inata e cada sujeito precisa desenvolvê-la individualmente (SETTIMY; BAIRRAL, 2020). A dificuldade de o aluno em representar o objeto de forma adequada sugere falta de desenvolvimento dessa habilidade, causando prejuízos na construção do conhecimento matemático relacionado a visualização geométrica.

Continuando a análise das respostas dadas pelos estudantes, observamos que 6 estudantes ( $A_1, A_2, B_2, C_1, E_1$  e  $E_4$ ) fizeram uma casquinha de sorvete para representar o cone reto (nenhum estudante fez um cone oblíquo), e 4 estudantes ( $B_1, B_3, D_3$  e  $D_4$ ) desenharam apenas um cone, sem relacionar o sólido a nenhum objeto do dia a dia.

O estudante  $A_1$  fez um desenho com justificativa em língua natural e com desenhos, conforme podemos ver na Figura 3.

**Figura 3** - Resposta elaborada pelo estudante  $A_1$ .



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Percebemos que, ao fazer a representação do cone com as intersecções, o estudante demonstrou conhecimento de perspectiva. Isso fica claro no traçado pontilhado, que representa a parte de trás do objeto.

Quanto às intersecções, o estudante visualizou somente o círculo e o triângulo, conforme destacado por ele na Figura 3. Durante o processo de investigação do estudante, aconteceu o seguinte diálogo:

**$A_1$ :** Professor, acho que consegui encontrar um triângulo na intersecção.

**PROFESSOR:** Como foi o processo?

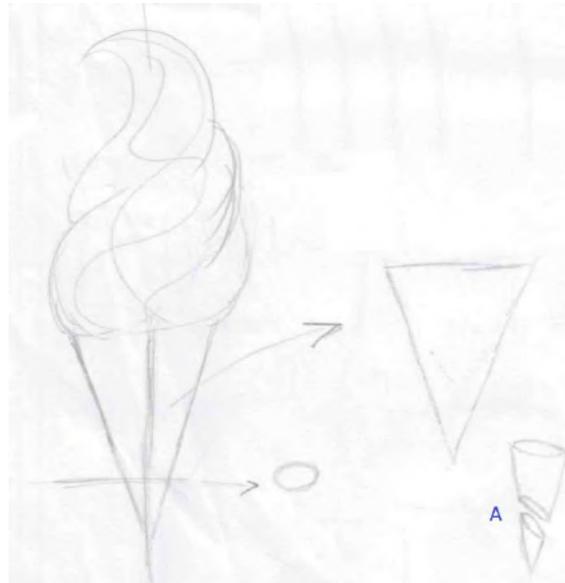
**$A_1$ :** É só fazer qualquer plano passando em pé pelo círculo da base.

**PROFESSOR:** Em qualquer lugar?

**$A_1$ :** Sim.

Percebemos, por esse diálogo, que o estudante não conseguiu visualizar intersecções além do círculo e do triângulo, diferente do estudante  $E_1$  que fez o desenho representado na Figura 4.

**Figura 4** - Resposta elaborada pelo estudante  $E_1$ .



Fonte: Produção dos estudantes.

O aluno  $E_1$ , representou a intersecção por meio de dois riscos no desenho, cada um deles encontrando uma figura.

Durante o desenvolvimento da atividade, o professor acompanhou o estudante  $E_1$  enquanto fazia as intersecções no cone, ocorrendo o seguinte diálogo:

**PROFESSOR:** Que figura é essa? (mostrada em A).

$E_1$ : É um círculo.

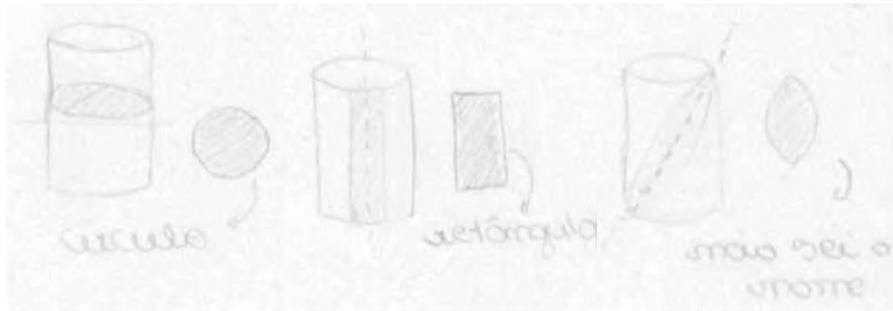
**PROFESSOR:** Como você fez pra encontrá-lo?

$E_1$ : Cortei um pouco de lado assim...

Pelo diálogo acima, percebemos que o estudante utilizou a habilidade de rotação mental (RM) ao mover o plano para intersectar o cone de forma inclinada em relação à base. Percebemos também que o estudante possui alguma dificuldade com conceitos relacionados à geometria analítica, confundindo elipse com círculo. Os demais estudantes fizeram apenas representações semelhantes às citadas acima. A visualização de intersecções diferentes das representadas envolve a habilidade de rotação mental, assim como visto por Gutiérrez (1996).

Prosseguindo com a análise, percebemos que 4 estudantes ( $A_2$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $D_3$ ) representaram um cilindro, sem associá-lo com nenhum objeto do dia a dia. O estudante  $C_3$  encontrou três formas diferentes de seccionar o sólido, conforme vemos na Figura 5.

**Figura 5** - Resposta elaborada pelo estudante  $C_3$ .



Fonte: Produção dos estudantes.

As formas encontradas mostram que o estudante possui bom conhecimento de representação em perspectiva. Diferente dos demais estudantes, que encontraram apenas duas formas, ele foi capaz de identificar uma terceira forma cujo nome desconhecia, conforme podemos ver na Figura 28. Durante o desenvolvimento da atividade se desenvolveu um diálogo interessante, cujo recorte podemos observar abaixo:

**PROFESSOR:** Você encontrou três figuras diferentes?

**$C_3$ :** Sim. Um círculo, um retângulo e essa daqui (apontando para a terceira figura desenhada).

**PROFESSOR:** Qual a diferença entre a primeira e a terceira?

**$C_3$ :** Essa daqui vai afinando nas pontas, como se fosse um círculo meio amassado, oval.

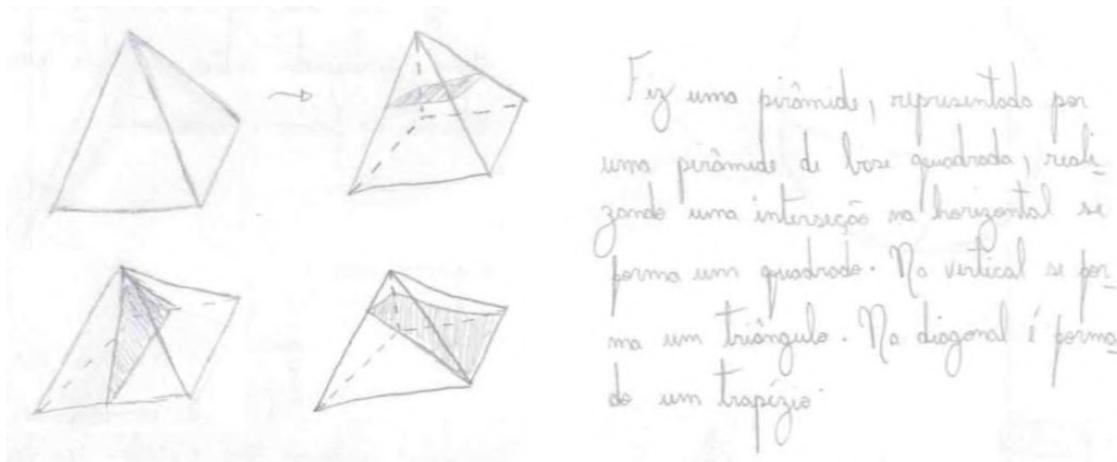
**PROFESSOR:** Como você encontrou essa figura?

**$C_3$ :** Fazendo com que o plano cortasse de forma bem inclinada o cilindro.

No trecho supracitado percebemos que  $C_3$  encontrou uma figura diferente dos demais estudantes. Vemos que o estudante possui domínio da habilidade de rotação mental (RM), pois de acordo com Gutiérrez (1996), o estudante foi capaz de produzir uma imagem mental dinâmica. Apesar disso, ele demonstrou certa dificuldade em geometria analítica, não sendo capaz de identificar corretamente a cônica visualizada.

Continuando a análise das produções feitas pelos estudantes, observamos que três estudantes ( $A_1$ ,  $C_3$  e  $E_1$ ) representaram pirâmides. Todas as pirâmides representadas foram retas. A Figura 6 representa as pirâmides desenhadas pelo estudante  $A_1$ .

**Figura 6** - Resposta elaborada pelo estudante  $A_1$ .

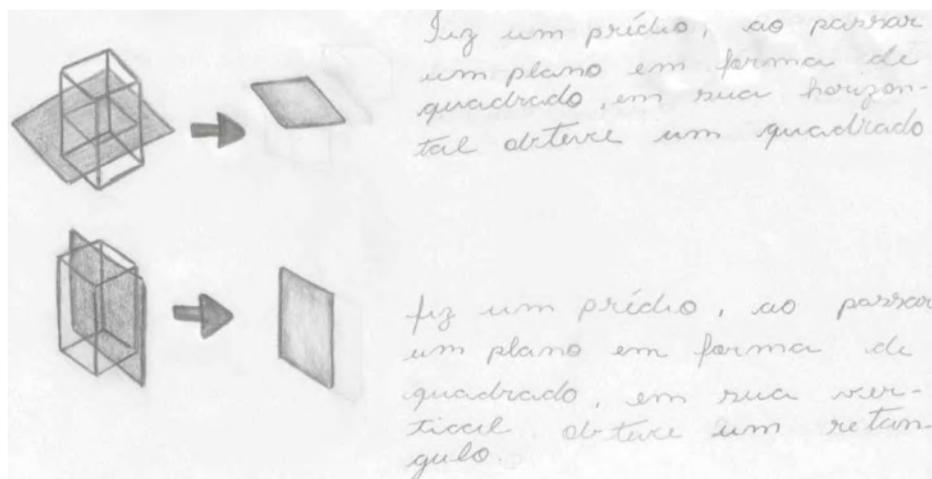


Fonte: Acervo dos pesquisadores.

O estudante demonstrou um pouco de dificuldade com alguns termos de geometria, ao utilizar o termo “na diagonal” para expressar que o plano estava inclinado em relação à base quadrada. Percebemos, também, que  $A_1$  só desenhava pirâmides de base quadrada. Diferente do estudante  $A_1$ ,  $C_3$  encontrou apenas duas intersecções dos planos com a pirâmide.

Três estudantes ( $A_1, A_2$  e  $C_3$ ) desenharam prédios para representar paralelepípedos; 1 estudante ( $B_1$ ) desenhava uma gaveta e 2 estudantes ( $B_3$  e  $C_2$ ) desenharam um paralelepípedo, sem associar a um objeto do dia a dia. O estudante  $A_2$  encontrou apenas intersecções feitas por planos paralelos à base e aos lados, conforme Figura 7.

**Figura 7** - Resposta elaborada pelo estudante  $A_2$ .



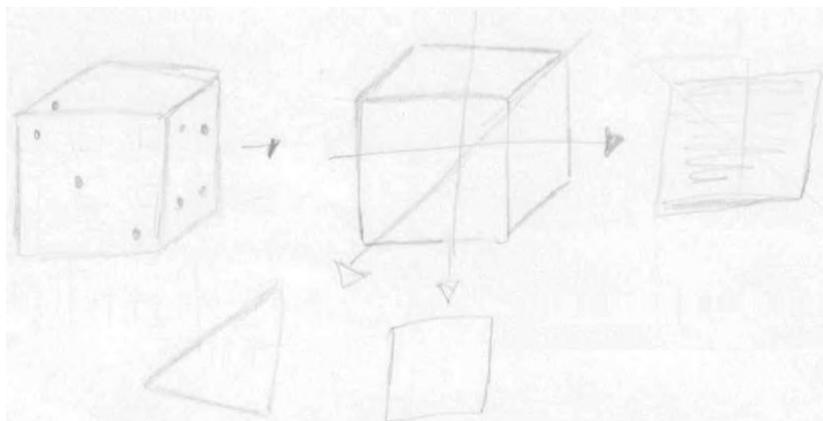
Fonte: Acervo dos pesquisadores.

O estudante  $A_2$ , diferente dos demais, não representou apenas a região em comum ao sólido e ao plano, mas sim uma região do plano, destacando no próprio sólido, a região em comum aos dois, e depois ainda representou de forma isolada, a figura encontrada na intersecção. Isso mostra que o estudante domina a habilidade de percepção de figura de fundo (PFF), que segundo Gutiérrez (1996), é a capacidade de identificar a figura fora de seu contexto.

Os estudantes  $B_1$  e  $B_3$  fizeram desenhos semelhantes. Ambos encontraram apenas uma intersecção (retângulo) paralela à base horizontal. Os demais estudantes encontraram intersecções paralelas às faces laterais.

Em relação ao cubo, 5 estudantes ( $B_1, B_3, C_2, E_2$  e  $E_3$ ) desenharam um dado para representar um cubo, e 2 estudantes ( $D_3$  e  $D_4$ ) desenharam apenas o cubo, sem associá-lo com um objeto do dia a dia, como mostrado na Figura 8.

**Figura 8** - Resposta elaborada pelo estudante  $B_1$ .



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Analisando os desenhos, percebemos que o estudante não representou corretamente a figura geométrica (ausência as linhas pontilhadas da parte não visível). As dificuldades demonstradas pelos alunos da presente pesquisa em representar os sólidos dão sinais de que a habilidade não desenvolvida acompanhou o aluno por todo o percurso educacional até o ensino médio.

Percebemos que o estudante encontrou três figuras nas intersecções dos planos com o cubo. Uma das figuras encontradas pelo estudante foi o triângulo. Durante o processo de investigação, aconteceu o seguinte diálogo:

**$B_1$ :** Professor, tá muito difícil pra desenhar isso daqui.

**PROFESSOR:** Onde está sua dificuldade?

**$B_1$ :** Tipo, eu consegui visualizar um triângulo na diagonal, mas não estou conseguindo mostrar aqui no papel o lugar exato que ele está dentro do cubo!

No trecho selecionado, percebemos que o estudante possui uma boa noção de rotação mental (RM) e de percepção de figura de fundo (PFF). Conseguimos perceber, também, uma dificuldade do estudante em representar em perspectiva a intersecção encontrada no cubo desenhado. Os demais desenhos feitos pelos estudantes foram semelhantes a esse.

Terminada a aplicação das atividades, o professor recolheu as folhas de respostas dos estudantes e conversou um pouco sobre o trabalho desenvolvido. Foi perguntado aos estudantes quais foram as facilidades e dificuldades encontradas por eles no processo de visualização e representação em perspectiva, utilizando apenas lápis e papel, e ocorreu o diálogo abaixo.

**PROFESSOR:** Pessoal, o que vocês acharam da atividade de hoje?

**$B_1$ :** Cansativa.

**$B_2$ :** Chata.

**$E_1$ :** Ah, eu achei legal.

**$C_1$ :** Eu achei complicado, por não saber os nomes das figuras geométricas.

Percebemos que, ao serem questionados sobre a experiência da atividade aplicada, os estudantes classificaram-na como “cansativa” e “chata”, justificando da forma representada no corte de diálogo que segue:

**PROFESSOR:** O que sentiram mais dificuldade nessa atividade?

**C<sub>2</sub>:** Desenhar.

**C<sub>3</sub>:** Dividir o negócio.

**PROFESSOR:** E vocês?

**E<sub>1</sub>:** O jeito do corte da figura às vezes era difícil de reproduzir, entendeu?

**PROFESSOR:** E vocês? O que tiveram mais dificuldade na realização da atividade?

**A<sub>1</sub>:** Visualizar a intersecção.

**A<sub>2</sub>:** Isso, visualizar a figura que a intersecção formaria.

**B<sub>1</sub>:** A mesma coisa que os estudantes  $A_1$  e  $A_2$  falaram: cortar a figura, fazer as intersecções e visualizar como que ela ficaria de acordo com as intersecções.

**PROFESSOR:** Mais algum aluno gostaria de falar de alguma dificuldade nessa atividade?

**D<sub>1</sub>:** Eu acho que o mais complicado foi pensar numa figura, no desenho em como fazer o corte.

Esse diálogo revela a existência de uma certa dificuldade dos estudantes na elaboração dos desenhos e na nomenclatura dos termos de geometria, trocando “intersecção” por “dividir”, por exemplo. Reforça o que foi falado anteriormente, confirmando a dificuldade dos estudantes em utilizarem termos adequados para se referirem aos conceitos geométricos.

Mostra também que os estudantes tiveram dificuldade em visualizar mentalmente a intersecção dos planos com os sólidos. Percebemos que a atividade, da forma que foi aplicada (apenas lápis e papel), despertou pouco interesse em todos os estudantes. Pelos desenhos feitos, percebemos que os estudantes possuem dificuldade em representar um sólido geométrico tridimensional em um ambiente bidimensional. Ao serem perguntados, confirmaram que tiveram bastante dificuldade na visualização mental das imagens.

Na atividade apresentada, conseguimos elencar as habilidades abaixo (mesmo que com algum tipo de dificuldade):

1. Percepção figura de fundo;
2. Rotação mental;
3. Discriminação visual.

Por outro lado, verificamos que as habilidades abaixo não foram contempladas:

1. Constância perceptiva;
2. Percepção de posições espaciais;
3. Percepção de relações espaciais.

Após analisarmos a nossa experiência e os trabalhos de outros autores com lápis e papel, destacamos as seguintes vantagens e desvantagens (Tabela 3):

**Tabela 3** - Vantagens e desvantagens do uso de lápis e papel no estudo de geometria espacial

VANTAGENS	DESVANTAGENS
Fácil execução	Limitações das representações 3D em ambiente 2D
Estimula a criatividade do estudante	Impossibilidade de manipulação das figuras geométricas
Ajudar a desenvolver a habilidade de desenho pelos estudantes	Exigência de habilidade de visualização e rotação mental
	Dificuldade na representação das linhas em perspectiva de figuras 3D em ambiente 2D
	Dificuldade de que os estudantes provem as hipóteses elaboradas por eles
	Atividade pouco motivadora, por ser muito estática.

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores.

## 5. Considerações Finais

Dificuldades com conteúdos matemáticos encontradas por estudantes do ensino médio não nascem no ensino médio, e tampouco se encerram com ele. Elas se somam durante todo o percurso escolar do indivíduo pela educação básica, e para além desta. E isso também se aplica ao estudo da geometria espacial, mais especificamente nas habilidades próprias da visualização geométrica, objeto de estudo desta pesquisa.

Relegada a segundo plano, ou abordada de forma aligeirada e incompleta, a geometria, durante muito tempo, foi tratada como o “patinho feio” da matemática. Para além disso, quando inserida no contexto escolar, as abordagens pedagógicas utilizadas têm se mostrado pouco eficazes, principalmente por não propiciarem espaços para manipulações, visualizações, investigações e estabelecimento de conjecturas, por não se criarem condições para que os estudantes sejam protagonistas de suas aprendizagens. Uma abordagem com potencial pedagógico promissor necessariamente deve envolver o uso de recursos que levem à experimentação, essencial para os processos de ensino e de aprendizagem da geometria espacial, em particular. Nesse aspecto, é importante considerar que o ensino da visualização geométrica tem sido prejudicado pelo uso de um único recurso (o livro didático) que apresenta os sólidos geométricos por meio de imagens em um plano bidimensional, dificultando a compreensão dos alunos. Faz-se necessário, portanto, investigar como os alunos se comportam diante de questões que envolvem visualização geométrica, com uso de diferentes recursos, como representação tradicional com lápis e papel. Foi com a intenção de colaborar nessa perspectiva que essa pesquisa foi realizada.

Inicialmente, a partir do objetivo específico dessa pesquisa, buscamos identificar elementos que pudessem subsidiar a elaboração de uma proposta de atividade voltada para o ensino de visualização geométrica. Para atender esse objetivo fizemos uma revisão de literatura objetivando conhecer outras pesquisas que tiveram como bases teóricas elementos que pudessem nos ajudar a compreender como as temáticas de interesse têm sido abordadas. Nesses trabalhos pudemos perceber que as atividades aplicadas pelos pesquisadores renderam bons resultados e foram validadas de forma positiva. Além disso, fizemos estudos teóricos utilizando como fio condutor os eixos conceitual, pedagógico e comunicacional (KAPLÚN, 2003), para nos fornecer elementos para a elaboração da proposta didática produzida. Essas leituras nos levaram a passear pelas temáticas de visualização geométrica, pautadas nas habilidades de Gutiérrez (1996) e atividades investigativas, pautadas em trabalhos de Ponte (2003).

Ao verificar potencialidades do uso de lápis e papel para o desenvolvimento de atividade de visualização geométrica, pudemos perceber que grande parte dos estudantes demonstraram dificuldades em realizar as atividades propostas. Porém, é uma atividade que estimula a criatividade do estudante, ajudando-o a desenvolver a habilidade de desenho.

Acreditamos que, ao cumprir o objetivo deste trabalho conseguimos analisar as possíveis contribuições da proposta de ensino de visualização geométrica pautada na investigação matemática, utilizando apenas lápis e papel. Esta abordagem mostrou que mesmo o trabalho com materiais mais simples pode contribuir para o ensino-aprendizagem de geometria, ainda que com algumas limitações. Defendemos que diferentes estratégias podem e devem ser empregadas para propiciar um trabalho que atenda diferentes perfis educacionais, tornando a sala de aula um ambiente mais acolhedor e produtivo.

Como proposta futura, propomos que sejam trabalhados outros elementos de geometria, como por exemplo, a planificação de sólidos geométricos. Propomos também que sejam elaboradas atividades que contemplem as habilidades que não foram contempladas na atividade desenvolvida.

## Referências

- Becker, M. (2009). *Uma alternativa para o ensino de Geometria: Visualização Geométrica e representações de sólidos no plano*. 111 p. Dissertação. <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/17161>.
- Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora. 336 p.
- Bortolossi H. J. (2020). Movimentos, Pensamentos e GeoGebra: alguns aspectos neurocientíficos no ensino e aprendizagem da Matemática. In: Basniak, M. I. & Rubio-Pizzorno, S. (2020). *Perspectivas teórico-metodológicas em pesquisas que envolvem tecnologia na Educação Matemática: o GeoGebra em foco*. [https://www.academia.edu/44833466/Perspectivas\\_te%C3%B3rico\\_metodol%C3%B3gicas\\_em\\_pesquisas\\_que\\_envolvem\\_tecnologia\\_na\\_Educa%C3%A7%C3%A3o\\_Matem%C3%A1tica\\_o\\_GeoGebra\\_em\\_foco](https://www.academia.edu/44833466/Perspectivas_te%C3%B3rico_metodol%C3%B3gicas_em_pesquisas_que_envolvem_tecnologia_na_Educa%C3%A7%C3%A3o_Matem%C3%A1tica_o_GeoGebra_em_foco).
- Brasil. (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF. <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>.
- Fainguelemt, E. K. (1996). *Representação do conhecimento geométrico através da informática*. 249 p. Tese. <https://www.cos.ufrj.br/uploadfile/1339609295.pdf>
- Fonseca, E. A. A. (2014). *Metodologia para auxiliar professores de matemática no processo de seleção de conteúdos digitais*. 118 p. Dissertação. [http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2011/05/Dissertacao\\_Elias\\_versao-final\\_2014\\_06.pdf](http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2011/05/Dissertacao_Elias_versao-final_2014_06.pdf).
- Fonseca, H., Brunheira, L. & Ponte, J. P. (1999). *As atividades de investigação, o professor e a aula de Matemática*. Actas do ProfMat 99. Lisboa: APM. <http://docplayer.com.br/35546123-As-atividades-de-investigacao-o-professor-e-a-aula-de-matematica.html>.
- Fonseca, M. C. F. R. et al. (2001). *O ensino de Geometria na Escola Fundamental - Três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais*. Autêntica.
- Gazire, E. S. (2000). *O não resgate das geometrias*. 217 f. Tese. <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/252634>.
- Gutierrez, A. (1998). *Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales em La enseñanza de la geometría espacial*. Revista EMA n. 3, v.3 p.193-220.
- Gutierrez, A. (1996). *Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework*. <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf>.
- Lorenzato, S. (2006). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Coleção formação de professores.
- Maragoni, A. C., Geron, A. C. & Coelho, L. M. F. R. (2021). *Lacunias no ensino da Geometria Euclidiana*. <http://legacy.unifacef.com.br/novo/publicacoes/IIforum/Textos%20EP/Lucinda,%20Antonio%20Cesar%20e%20Antonio%20Carlos%20.pdf>.
- Matos, J. M. & Gordo, M. F. (1993). *Visualização espacial: algumas atividades*. Educação e Matemática, (26), 13-17.
- Minayo, M. C. S. (1994). *O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde*. Hucitec.
- Pavanello, R. M. (1989). *O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica*. 210 p. Dissertação. <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/252057>
- Ponte, J.P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa. Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.
- Rosa, T. C. P. (2022). *Do lápis e papel à realidade aumentada: uma proposta de ensino de visualização geométrica*. 162 p. Dissertação. <https://repositorio.ifes.edu.br/handle/123456789/2061>.
- Settmy, T. F. O. & Bairral, M. A. (2020). *Dificuldades Envolvendo a Visualização em Geometria Espacial*. VIDYA, 40(1), 177-195, jan./jun., 2020. <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/3219/2530>
- Silva, J. E. et al. (2016). *A geometria espacial trabalhada a partir da construção de sólidos geométricos*. Anais IX EPBEM. Realize Editora. <https://www.editorarealize.com.br/index.php/artigo/visualizar/26381>.