

Determinação dos coeficientes do Método das Diferenças Finitas

Determination of the Finite Differences Method coefficients

Determinación de los coeficientes del Método de las Diferencias Finitas

Recebido: 05/01/2023 | Revisado: 19/01/2023 | Aceitado: 20/01/2023 | Publicado: 23/01/2023

Luciano Cesario da Silva

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0485-6389>

Universidade de Pernambuco, Brasil

E-mail: lucianocesario19@gmail.com

Paulo Cavalcante do Nascimento Junior

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7928-3319>

Universidade de Pernambuco, Brasil

E-mail: paulocavalcantejr@upe.br

Resumo

Este artigo tem como objetivo apresentar um procedimento para determinar os coeficientes do Método das Diferenças Finitas (MDF). A abordagem contida no trabalho consiste em aproximar derivadas de diferentes ordens a partir dos primeiros termos da Série de Taylor, obtendo coeficientes que são utilizados na construção da Equação de Diferenças Finitas (EDF), a qual é utilizada para aproximar a solução de uma Equação Diferencial Ordinária (EDO). Para a determinação desses coeficientes foi desenvolvido um processo que toma como base os casos das derivadas primeiras de uma função e generaliza para a derivada de n -ésima ordem. A partir deles é possível expandir o método numérico de estudo para aproximar a solução de uma EDO de ordem qualquer. Para exemplificar as aplicações do MDF, foram feitas as descrições de problemas físicos que recaem em equações diferenciais e apresentadas as soluções aproximadas, onde, em cada caso, foi necessário construir a EDF associada à EDO e resolver o sistema linear gerado por essa EDF. Além disso, para efeito de comparação, foram apresentados os valores exatos das soluções para verificar a diferença entre a solução aproximada e a solução exata.

Palavras-chave: Determinação de coeficientes; Equações Diferenciais Ordinárias; Método das Diferenças Finitas; Método numérico.

Abstract

This article aims to present a procedure to determine of the Finite Difference Method (FDM) coefficients. The approach contained in the work consists of approximating derivatives of different orders from the first terms of the Taylor Series, obtaining coefficients that are used in the construction of the Finite Difference Equation (FDE), which is used to approximate the solution of a Differential Equation Ordinary (ODE). For the derivatives of a function, a process was developed that takes as a basis the cases of the first derivatives of a function and generalizes to the derivative of n th order. From them it is possible to expand the numerical method of study to approach the solution of an ODE of any order. To exemplify the applications of FDM, contemporary physical problems that fall into integrated and compatible with approximate solutions were made, where, in each case, it was necessary to build an FDE associated with the ODE and solve the linear system generated by this FDE. In addition, for comparison purposes, the exact values of the solutions were presented to verify the difference between the approximate solution and the exact solution.

Keywords: Determination of coefficients; Ordinary Differential Equations; Finite Difference Method; Numerical method.

Resumen

El objetivo de este artículo es presentar un procedimiento para determinar los coeficientes del Método de Diferencias Finitas (MDF). El enfoque contenido en el trabajo consiste en aproximar derivadas de diferente orden a partir de los primeros términos de la Serie de Taylor, obteniendo coeficientes que se utilizan en la construcción de la Ecuación en Diferencias Finitas (EDF), que se utiliza para aproximar la solución de una Ecuación Diferencial Ordinario (EDO). Para determinar estos coeficientes se desarrolló un proceso basado en los casos de las primeras derivadas de una función y generalizado a la derivada de orden n . A partir de ellos es posible ampliar el método numérico de estudio para aproximar la solución de una EDO de cualquier orden. Para ejemplificar las aplicaciones de MDF se realizaron descripciones de problemas físicos que caen dentro de ecuaciones diferenciales y se presentaron soluciones aproximadas, donde en cada caso fue necesario construir la EDF asociada a la EDO y resolver el sistema lineal generado por esta EDF. Además, con fines de comparación, se presentaron los valores exactos de las soluciones para verificar la diferencia entre la solución aproximada y la solución exacta.

Palabras clave: Determinación de coeficientes; Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; Método de Diferencias Finitas; Método numérico.

1. Introdução

Métodos numéricos são ferramentas matemáticas importantes para encontrar soluções de equações diferenciais. Tais métodos têm como característica aproximar a solução e costumam ser utilizados quando a solução exata de uma equação diferencial não é viável por meio de métodos analíticos. Nesse artigo será tratado sobre o Método Numérico das Diferenças Finitas, método bastante útil para solucionar Equações Diferenciais Ordinárias Lineares e que consegue valores muito próximos da solução exata.

No mundo físico, muitos processos costumam envolver proposições e relações envolvendo taxas de variação de determinada grandeza. Quando descritos em linguagem matemática, tais processos são modelados por equações que envolvem derivadas de diferentes ordens. Essas são as chamadas Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) (Boyce, 2010). Sendo breve, uma EDO linear de ordem n é qualquer equação envolvendo derivadas até ordem n de uma função $y(x)$, que possa ser escrita na forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + q_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + q_1(x) \frac{dy}{dx} + q_0(x)y(x) = g(x) \quad (1)$$

De forma equivalente, será mais útil nesse trabalho escrever uma EDO com a notação

$$y^{(n)} + q_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + q_2(x)y'' + q_1(x)y' + q_0(x)y = g(x) \quad (2)$$

Resolver uma EDO significa encontrar uma função $y(x)$ que satisfaça à equação 2. E isso é algo de extrema importância, pois através da solução pode-se estudar o comportamento de muitos fenômenos de áreas como a Física, Economia, Engenharia, etc. (Chinchio, 2012; Oliveira, 2023; Aquino et al., 2020; Silva et al., 2020). No entanto, encontrar a solução de uma EDO nem sempre é uma tarefa simples e, na prática, a maioria dessas equações não são resolvidas com métodos que fornecem uma solução exata. Mas, por meio da utilização de métodos numéricos, a solução de uma EDO pode ser bem aproximada. Ferreira (2007), descreve que praticamente qualquer EDO pode ser resolvida numericamente e de tal forma que não existe limitações advindas da complexidade dela, além de se obter soluções aproximadas tão próximas quanto se queira da solução exata.

No caso do método a ser abordado nesse trabalho, o Método das Diferenças Finitas (MDF), faz-se a aproximação da solução exata por meio de um Problema de Valor de Contorno cuja formulação é dada por uma EDO e por pontos conhecidos que condicionam a procura por soluções.

Para aplicação do MDF, é necessário construir a Equação das Diferenças Finitas, a qual depende da aproximação das derivadas de ordem um até a ordem da EDO. Por sua vez, a aproximação de uma derivada depende da determinação de coeficientes centrados em um i -ésimo ponto. Logo, se faz necessário um procedimento que determine tais coeficientes.

Como aplicação do MDF serão resolvidos problemas sobre variação de temperatura, queda de corpo em queda livre e flexão de vigas, os quais recaem em equações diferenciais de diferentes ordens. Dessa maneira, esse trabalho tem por objetivo apresentar um procedimento para determinação dos coeficientes do MDF para Equações Diferenciais Ordinárias lineares de enésima ordem e, além disso, aplicar o método numérico na resolução de alguns exemplos.

2. Metodologia

A literatura inicial consultada para determinar os coeficientes do MDF consiste em autores como Guidorizzi (2013), Stewart (2013) e Zill (2009), pois desenvolvem rigor matemático envolvendo a ideia de Série de Taylor, conceito fundamental nesse trabalho.

De acordo com Stewart (2013), a Série de Taylor de uma função $y(x)$, centrada em um ponto α pertencente ao domínio de y , é a série dada por

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n \quad (3)$$

Em sua forma expandida, $y(x)$ fica representada como

$$y(x) = y(\alpha) + y'(\alpha) \frac{(x - \alpha)}{1!} + y''(\alpha) \frac{(x - \alpha)^2}{2!} + \dots + y^{(n)}(\alpha) \frac{(x - \alpha)^n}{n!} + \dots \quad (4)$$

Se forem tomados apenas os primeiros termos da série tem-se o Polinômio de Taylor, o qual consegue uma aproximação razoável do valor da função y nos pontos próximos a α (Guidorizzi, 2013; Stewart, 2013). Esse processo de limitar uma série ao polinômio de grau n é chamado de truncamento e esse fato será utilizado para determinar os coeficientes do MDF a partir dos primeiros termos da Série de Taylor.

No desenvolvimento das aplicações do MDF para resolver as EDOs foram tomadas como referências principais os trabalhos de Bassanezi (1988), Cassemiro (2011), Silva (2014) e Alves (2021). Grande parte da descrição dos problemas físicos modelados pelas EDOs foram fundamentadas nesses autores, mas, em outros momentos, também houve complementos de outras literaturas e autores.

3. Resultados e Discussão

Aproximação da Derivada de Primeira Ordem

Para fazer uma aproximação numérica utilizando o MDF para a Equação 2 é necessário realizar uma discretização do domínio da função, deixando de lado seu aspecto contínuo e trabalhando com um conjunto discreto de pontos. Dessa forma, $y(x)$ passa a ser referenciado como $y(x_i)$. Assim, $y = y_i$, e de forma análoga, tem-se $y' = y'_i, y'' = y''_i, y''' = y'''_i, \dots$

Procurando obter uma aproximação para a derivada primeira de uma função y , seja $\alpha = x_i$ e $x = x_i + h$, para algum $h > 0$. Nessas condições, truncando a Série de Taylor em $n = 1$, tem-se:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i)$$

De forma análoga, fazendo $a = x_i$ e $x = x_i - h$, tem-se:

$$y(x_i - h) = y(x_i) - h \cdot y'(x_i)$$

Definindo $y_{i+1} = y(x + h)$, $y_i = y(x_i)$, $y_{i-1} = y(x - h)$, pode-se reescrever

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i \quad (5)$$

$$y_{i-1} = y_i - hy'_i \quad (6)$$

Agora, supondo que a derivada no ponto x_i é uma combinação linear de y_{i+1} e y_{i-1} e que a aproximação esteja centrada em y_i então seja $y'_i = ay_{i-1} + by_{i+1}$, onde a e b são os coeficientes que devemos determinar.

Utilizando (5) e (6), temos

$$y'_i = a(y_i - hy'_i) + b(y_i + hy'_i)$$

$$y'_i = (-a + b)hy'_i + (a + b)y_i$$

$$y'_i + 0y_i = (-a + b)hy'_i + (a + b)y_i$$

Analisando a identidade acima, sabemos que deve haver uma igualdade entre os coeficientes, logo,

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ (-a + b)h = 1 \end{cases}$$

Ou ainda, tem-se o sistema linear:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = \frac{1}{h} \end{cases}$$

E na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \end{pmatrix}.$$

A solução do sistema é dada por $\left(-\frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}\right)$. E então, temos uma aproximação para y'_i dada por

$$y'_i = \frac{-y_{i-1} + y_{i+1}}{2h} \quad (7)$$

Observe que os pontos y_j do numerador estão centrados em torno do ponto y_{i+0} . Baseando-se nessa ideia de centro, será utilizado o mesmo raciocínio para construir as aproximações das derivadas de ordem mais alta.

Aproximação da Derivada de Segunda Ordem

Agora, procurando obter uma aproximação para a derivada de ordem dois, supondo $y''_i = ay_{i-1} + by_i + cy_{i+1}$, deve-se encontrar os valores para os coeficientes a, b e c , os quais caracterizam a expressão que a aproxima.

Fazendo o truncamento da Série de Taylor em $n = 2$ e tomando novamente $\alpha = x_i$ e $x = x_i + h$, tem-se:

$$\begin{aligned} y(x_i + h) &= y(x_i) + y'(x_i) \frac{(x_i + h - x_i)}{1!} + y''(x_i) \frac{(x_i + h - x_i)^2}{2!} \\ y(x_i + h) &= y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2 \cdot y''(x_i)}{2} \end{aligned}$$

E de forma análoga, fazendo $\alpha = x_i$ e $x = x_i - h$, se obtém:

$$y(x_i - h) = y(x_i) - h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2 \cdot y''(x_i)}{2}$$

Para o que segue a partir daqui, definimos $y_{i+j} = y(x_i + j \cdot h)$, para $j \in \mathbb{Z}$. Utilizando essa notação, faz-se a aproximação para y''_i :

$$\begin{aligned} y''_i &= ay_{i-1} + by_i + cy_{i+1} \\ y''_i &= a \left[y_i - h \cdot y'_i + \frac{h^2 \cdot y''_i}{2} \right] + by_i + c \left[y_i + h \cdot y'_i + \frac{h^2 \cdot y''_i}{2} \right] \\ y''_i &= (a + c) \frac{h^2}{2} \cdot y''_i + (-a + c)hy'_i + (a + b + c)y_i \end{aligned}$$

Como a igualdade acima é uma identidade envolvendo derivadas, pode-se reescrevê-la como

$$y_i^{(2)} + 0 \cdot y_i^{(1)} + 0 \cdot y_i^{(0)} = (a + c) \frac{h^2}{2} \cdot y_i^{(2)} + (-a + c)h \cdot y_i^{(1)} + (a + b + c) \cdot y_i^{(0)}$$

E agora basta comparar os coeficientes, obtendo o sistema linear:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ (-a + c)h = 0 \\ (a + c) \frac{h^2}{2} = 1 \end{cases}$$

E como $h \neq 0$, obtém-se ainda,

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + c = 0 \\ a + c = \frac{2}{h^2} \end{cases}.$$

Tem-se então o sistema matricial a seguir: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{h^2} \end{pmatrix}$

A solução do sistema nos dá os coeficientes da aproximação para a derivada segunda e é dada por $\left(\frac{1}{h^2}, -\frac{2}{h^2}, \frac{1}{h^2}\right)$.

Sendo assim, a aproximação para a derivada de ordem dois é caracterizada por:

$$y_i'' = \frac{1}{h^2} \cdot y_{i-1} - \frac{2}{h^2} y_i + \frac{1}{h^2} y_{i+1}$$

$$y_i'' = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} \quad (8)$$

Aproximação da Derivada de Terceira Ordem

Procurando aproximar a derivada de ordem três, suponha $y_i''' = ay_{i-2} + by_{i-1} + cy_{i+1} + dy_{i+2}$. Devemos determinar os coeficientes que caracterizam tal aproximação.

Truncando a Série de Taylor em $n = 3$ e fazendo $a = x_i$ e $x = x_i + jh$, para $j \in \{-2, -1, 1, 2\}$, tem-se:

$$y_{i-2} = y(x_i + h) = y(x_i) - 2y_i'h + \frac{4y''(x_i)h^2}{2!} - \frac{8y'''(x_i)h^3}{3!}$$

$$y_{i-1} = y(x_i + h) = y(x_i) - y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)h^2}{2!} - \frac{y'''(x_i)h^3}{3!}$$

$$y_{i+1} = y(x_i + h) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)h^2}{2!} + \frac{y'''(x_i)h^3}{3!}$$

$$y_{i+2} = y(x_i + h) = y(x_i) + 2y_i'h + \frac{4y''(x_i)h^2}{2!} + \frac{8y'''(x_i)h^3}{3!}$$

Agora, substituindo na expressão de y_i''' :

$$y_i''' = a \left[y(x_i) - 2y_i'h + \frac{4y''(x_i)h^2}{2!} - \frac{8y'''(x_i)h^3}{3!} \right] +$$

$$b \left[y(x_i) - y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)h^2}{2!} - \frac{y'''(x_i)h^3}{3!} \right] +$$

$$c \left[y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)h^2}{2!} + \frac{y'''(x_i)h^3}{3!} \right] +$$

$$d \left[y(x_i) + 2y'(x_i)h + \frac{4y''(x_i)h^2}{2!} + \frac{8y'''(x_i)h^3}{3!} \right]$$

E colocando cada y_i em evidência, tem-se

$$y_i''' = (-8a - b + c + 8d) \frac{h^3}{3!} y_i''' + (4a + b + c + 4d) \frac{h^2}{2!} y_i'' + (-2a - b + c + 2d) y_i' + (a + b + c + d) y_i$$

Analisando a identidade encontrada, obtemos então o seguinte sistema 4×4 :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -2a - b + c + 2d = 0 \\ 4a + b + c + 4d = 0 \\ -8a - b + c + 8d = \frac{3!}{h^3} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3!}{h^3} \end{pmatrix}$$

Sua solução é $\left(-\frac{1}{2h^3}, \frac{1}{h^3}, \frac{1}{h^3}, -\frac{1}{2h^3}\right)$. Portanto, a aproximação para a derivada de terceira ordem é dada por:

$$y_i^{(3)} = -\frac{1}{2h^3} y_{i-2} + \frac{1}{h^3} y_{i-1} - \frac{1}{h^3} y_{i+1} + \frac{1}{2h^3} y_{i+2}$$

$$y_i^{(3)} = \frac{-y_{i-2} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{2h^3} \quad (9)$$

Aproximação da Derivada de Quarta Ordem

Centrando a aproximação de $y_i^{(4)}$ no ponto y_i , devemos determinar coeficientes a, b, c, d e e tais que $y_i^{(4)} = ay_{i-2} + by_{i-1} + cy_i + dy_{i+1} + ey_{i+2}$.

Como antes, tomando a série de Taylor, fazendo $a = x_i$ e $x = x_i + jh$, para $j \in \{-2, -1, 1, 2\}$ e aproximando y_{i+j} com os cinco primeiros termos da série, tem-se:

$$\begin{aligned} y_{i-2} &= y_i - 2y_i'h + \frac{4y_i''h^2}{2!} - \frac{8y_i'''h^3}{3!} + \frac{16y_i^{(4)}h^4}{4!} \\ y_{i-1} &= y_i - y_i'h + \frac{y_i''h^2}{2!} - \frac{y_i'''h^3}{3!} + \frac{y_i^{(4)}h^4}{4!} \\ y_{i+1} &= y_i + y_i'h + \frac{y_i''h^2}{2!} + \frac{y_i'''h^3}{3!} + \frac{y_i^{(4)}h^4}{4!} \\ y_{i+2} &= y_i + 2y_i'h + \frac{4y_i''h^2}{2!} + \frac{8y_i'''h^3}{3!} + \frac{16y_i^{(4)}h^4}{4!} \end{aligned}$$

Substituindo em $y_i^{(4)}$:

$$\begin{aligned} y_i^{(4)} &= a \left[y_i - 2y_i'h + \frac{4y_i''h^2}{2!} - \frac{8y_i'''h^3}{3!} + \frac{16y_i^{(4)}h^4}{4!} \right] + \\ & b \left[y_i - y_i'h + \frac{y_i''h^2}{2!} - \frac{y_i'''h^3}{3!} + \frac{y_i^{(4)}h^4}{4!} \right] + \\ & cy_i + \\ & d \left[y_i + y_i'h + \frac{y_i''h^2}{2!} + \frac{y_i'''h^3}{3!} + \frac{y_i^{(4)}h^4}{4!} \right] + \\ & e \left[y_i + 2y_i'h + \frac{4y_i''h^2}{2!} + \frac{8y_i'''h^3}{3!} + \frac{16y_i^{(4)}h^4}{4!} \right] \end{aligned}$$

Colocando cada y_i em evidência, temos

$$\begin{aligned} y_i^{(4)} &= (16a + b + c + d + 16d) \frac{h^4}{4!} y_i^{(4)} + (-8a - b + d + 8e) \frac{h^3}{3!} y_i^{(3)} + (4a + b + d + 4e) \frac{h^2}{2!} y_i^{(2)} \\ & + (-2a - b + d + 2e) h y_i^{(1)} + (a + b + c + d + e) y_i \end{aligned}$$

Essa identidade nos dá o sistema abaixo:

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 0 \\ -2a - b + d + 2e = 0 \\ 4a + b + d + 4e = 0 \\ -8a - b + d + 8e = 0 \\ 16a + b + c + d + 16d = \frac{4!}{h^4} \end{cases}$$

Ou ainda, em notação matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 16 & 1 & 0 & 1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4!}{h^4} \end{pmatrix}$$

A solução do sistema é dada por $\left(\frac{1}{h^4}, -\frac{4}{h^4}, \frac{6}{h^4}, -\frac{4}{h^4}, \frac{1}{h^4}\right)$.

E então, a aproximação para a derivada de quarta ordem é caracterizada por:

$$y_i^{(4)} = \frac{1}{h^4} y_{i-2} + -\frac{4}{h^4} y_{i-1} + \frac{6}{h^4} y_i + -\frac{4}{h^4} y_{i+1} + \frac{1}{h^4} y_{i+2}$$

$$y_i^{(4)} = \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{h^4} \quad (10)$$

Esse procedimento para encontrar as aproximações das derivadas pode ser generalizado para a aproximação de uma derivada de ordem n .

Aproximação da Derivada de Enésima Ordem

Para determinação dos coeficientes para uma aproximação da derivada de ordem n , tomamos coeficientes a_j e centramos a combinação linear de pontos y_j no i -ésimo ponto da lista. Para o caso da derivada de ordem n , tem-se $n + 1$ pontos que compõem tal lista. Como foi possível observar nas aproximações das derivadas das quatro primeiras ordens, é preciso dividir o problema em dois casos, sendo o primeiro quando a derivada que se quer aproximar é de ordem par e o segundo quando a ordem é ímpar.

Caso em que n é par:

Supondo a aproximação de $y_i^{(n)}$ centrada em y_i , escrevemos

$$y_i^{(n)} = a_0 \cdot y_{i-\frac{n}{2}} + a_1 \cdot y_{i-\frac{n}{2}+1} + a_2 \cdot y_{i-\frac{n}{2}+2} + \dots + a_n \cdot y_{i-\frac{n}{2}}$$

Pode-se reescrever tal expressão na forma de somatório da seguinte maneira:

$$y_i^{(n)} = \sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} a_{j+\frac{n}{2}} \cdot y_{i+j} \quad (11)$$

Mas, realizando o truncamento da Série de Taylor no polinômio de grau n , tem-se:

$$y_{i+j} = y_i + y_i^{(1)} h^1 + \frac{y_i^{(2)} (jh)^2}{2!} + \frac{y_i^{(3)} (jh)^3}{3!} + \dots + \frac{y_i^{(n)} (jh)^n}{n!}$$

De forma equivalente, podemos reescrever

$$y_{i+j} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{y_i^{(k)} \cdot (jh)^k}{k!} \quad (12)$$

Substituindo (12) em (11), tem-se:

$$y_i^{(n)} = \sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} a_{j+\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{y_i^{(k)} \cdot (jh)^k}{k!}$$

Realizando as devidas manipulações algébricas, tem-se ainda,

$$y_i^{(n)} = \sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{a_{j+\frac{n}{2}} \cdot (jh)^k}{k!} \cdot y_i^{(k)}$$

$$y_i^{(n)} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \frac{a_{j+\frac{n}{2}} \cdot (jh)^k}{k!} \cdot y_i^{(k)}$$

Mas, note que a identidade dessa igualdade implica que $y_i^{(k)} = 0$ para todo $k \neq n$. Logo, os coeficientes de $y_i^{(k)}$ são todos nulos e, para cada $k < n$, temos uma equação do tipo

$$\sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \frac{a_{j+\frac{n}{2}} \cdot (jh)^k}{k!} = 0$$

$$\frac{h^k}{k!} \sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} a_{j+\frac{n}{2}} \cdot j^k = 0$$

E como $h \neq 0$, obtemos o conjunto de equações:

$$\sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} a_{j+\frac{n}{2}} \cdot j^k = 0 \quad (13)$$

Além disso, para $k = n$, tem-se o coeficiente de $y_i^{(n)} = 1$, logo:

$$\sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \frac{a_{j+\frac{n}{2}} \cdot (jh)^n}{n!} = 1$$

$$= \frac{h^n}{n!} \sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} a_{j+\frac{n}{2}} \cdot j^n = 1$$

$$\sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} a_{j+\frac{n}{2}} \cdot j^n = \frac{n!}{h^n} \quad (14)$$

Reunindo as equações (13) e (14), tem-se o sistema linear com $n + 1$ equações e $n + 1$ incógnitas da forma $a_{j+\frac{n}{2}}$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0 \\ -\frac{n}{2}a_0 + \left(-\frac{n}{2} + 1\right)a_1 + \left(-\frac{n}{2} + 2\right)a_2 + \dots + \left(\frac{n}{2} - 1\right)a_{n-1} + \frac{n}{2}a_n = 0 \\ \left(-\frac{n}{2}\right)^2 a_0 + \left(-\frac{n}{2} + 1\right)^2 a_1 + \left(-\frac{n}{2} + 2\right)^2 a_2 + \dots + \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2 a_{n-1} + \left(\frac{n}{2}\right)^2 a_n = 0 \\ \left(-\frac{n}{2}\right)^3 a_0 + \left(-\frac{n}{2} + 1\right)^3 a_1 + \left(-\frac{n}{2} + 2\right)^3 a_2 + \dots + \left(\frac{n}{2} - 1\right)^3 a_{n-1} + \left(\frac{n}{2}\right)^3 a_n = 0 \\ \vdots \\ \left(-\frac{n}{2}\right)^n a_0 + \left(-\frac{n}{2} + 1\right)^n a_1 + \left(-\frac{n}{2} + 2\right)^n a_2 + \dots + \left(\frac{n}{2} - 1\right)^n a_{n-1} + \left(\frac{n}{2}\right)^n a_n = \frac{n!}{h^n} \end{cases}$$

Em notação matricial, pode-se escrever

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \left(-\frac{n}{2}\right) & \left(-\frac{n}{2} + 1\right) & \left(-\frac{n}{2} + 2\right) & \dots & \left(\frac{n}{2}\right) \\ \left(-\frac{n}{2}\right)^2 & \left(-\frac{n}{2} + 1\right)^2 & \left(-\frac{n}{2} + 2\right)^2 & \dots & \left(\frac{n}{2}\right)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(-\frac{n}{2}\right)^n & \left(-\frac{n}{2} + 1\right)^n & \left(-\frac{n}{2} + 2\right)^n & \dots & \left(\frac{n}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{n!}{h^n} \end{pmatrix}$$

Podemos ainda reescrever essa matriz dos coeficientes tomando como base a localização da linha e da coluna do elemento. Note que um elemento da coluna j e linha i pode ser obtido tomando a base $-\frac{n}{2} + j - 1$ e elevando à potência de valor $i - 1$. Dessa forma, para cada i e j , ambos variando de 1 a $n + 1$, temos que $a_{ij} = \left(-\frac{n}{2} + j - 1\right)^{i-1}$, com exceção do elemento $a_{1, \frac{n+2}{2}}$ que é dado por $a_{1, \frac{n+2}{2}} = 1$. Além disso, note que a matriz dos termos independentes contém apenas um elemento não nulo localizado na última linha.

Caso em que n é ímpar:

Para o caso da aproximação de uma derivada de ordem ímpar, n é um número ímpar, tem-se uma situação semelhante. Como antes, a aproximação é centrada no ponto y_i e possui um raio de aproximação com $n + 1$ pontos, mas agora o índice de y varia entre $-\frac{n+1}{2}$ e $\frac{n+1}{2}$.

$$y_i^{(n)} = \sum_{j = -\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \left[a_{j+\frac{n+1}{2}} \cdot y_{i+j} \right]$$

No entanto, note que nessas condições haverá um conjunto de $n + 2$ índices. Então, procurando centrar a aproximação em torno do ponto y_i , considera-se $j \neq 0$, de forma a obter uma expressão com $n + 1$ pontos:

$$y_i^{(n)} = \sum_{j = -\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} \left[a_{j+\frac{n+1}{2}} \cdot y_{i+j} \right]; j \neq 0$$

E então, de forma semelhante ao caso em que n é um número par, são obtidas as equações:

$$\sum_{j = -\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} a_{j+\frac{n+1}{2}} \cdot j^k = 0; k < n, j \neq 0$$

$$\sum_{j = -\frac{n+1}{2}}^{\frac{n+1}{2}} a_{j+\frac{n+1}{2}} \cdot j^n = \frac{n!}{h^n}; k = n, j \neq 0$$

Tem-se então um sistema com $n + 1$ equações e $n + 1$ incógnitas. E como no caso em que n é par, também é possível construir um termo geral de cada elemento da matriz dos coeficientes, bastando analisar as equações obtidas acima. Assim, chega-se à conclusão de que

$$a_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{-n + 2j - 3}{2} \right)^{i-1}, & \text{se } j < \frac{n+3}{2} \\ \left(\frac{-n + 2j - 1}{2} \right)^{i-1}, & \text{se } j > \frac{n+3}{2} \\ 1, & \text{se } j = \frac{n+3}{2} \end{cases}$$

Assim, para qualquer valor de n , pode-se montar a matriz dos coeficientes por meio das fórmulas obtidas para cada caso de paridade. Após isso, para determinar os coeficientes da aproximação de ordem n , basta inverter a matriz (a_{ij}) e multiplicar pelo vetor dos termos independentes, o qual é não nulo apenas na última linha do vetor.

APLICAÇÕES

Os coeficientes que aproximam as derivadas possuem grande importância na formulação do Método Numérico das Diferenças Finitas, o qual consegue aproximar a solução de Equações Diferenciais Ordinárias quando fornecidas as condições de contorno. Com a determinação dos coeficientes é possível desenvolver o método para uma aproximar a solução de uma EDO de ordem qualquer, estendendo assim o método descrito em Zill (2009), que o construiu para uma EDO de segunda ordem.

APLICAÇÃO 1: RESFRIAMENTO DE UM CORPO

A Lei de Resfriamento de Newton afirma que a taxa de variação de temperatura $T(t)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura constante (T_m) do meio ambiente, isto é, $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$, em que k é uma constante de proporcionalidade (Bassanezi, 1988; Silva, 2014). Como abordado por Alitolef (2011), essa Lei

tem importância pelo fato de poder ser aplicada em diversos contextos de variação de temperatura, como resfriamento de uma xícara de café, resfriamento de um bolo, aquecimento de uma pizza, entre muitas outras aplicações.

Note que a EDO que modela a variação de temperatura de um corpo é de primeira ordem. Para encontrar a solução da EDO será utilizado o Método das Diferenças Finitas (MDF), onde, por meio da Equação de Diferenças Finitas (EDF), obtém-se aproximações das soluções.

Para obtenção da EDF, considere uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem do tipo $y'(x) + P(x) \cdot y(x) = f(x)$ e suas condições de contorno dadas por $y(a) = c$ e $y(b) = d$. Tomando $h = \frac{b-a}{m}$, para algum $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$ e definindo $x_i = a + ih$, para $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, constrói-se uma malha do intervalo $[a, b]$, onde $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, \dots , $x_m = b$ (Zill, 2009). Note que ao tomar os pontos x_i foi feita uma discretização do domínio da função, o qual era um domínio contínuo. Essa abordagem é necessária porque a solução obtida com o método das diferenças finitas sempre é discreta, pois é aplicado em apenas alguns pontos do intervalo (Fontana, 2019).

Denotando $y(x_i) = y_i$, $P(x_i) = P_i$ e $f(x_i) = f_i$, podemos aproximar a EDO de primeira ordem por meio da aproximação de y' obtida em (7):

$$\frac{-y_{i-1} + y_{i+1}}{2h} + P_i y_i = f_i$$

$$-y_{i-1} + y_{i+1} - 2hP_i y_i = -2hf_i \quad (15)$$

E então, em (11), tem-se a Equação de Diferenças Finitas que aproxima uma EDO de primeira ordem. Para cada i , tem-se uma equação. E fazendo i variar de 1 a $m - 1$, tem-se um sistema de equações lineares com $m - 1$ equações e $m - 1$ incógnitas cuja solução é uma aproximação para a solução da EDO.

Suponha um problema de temperatura de um corpo que possui temperatura inicial de 50°F e é colocado ao ar livre, onde a temperatura ambiente é de 100°F. Se após 5 minutos a temperatura do corpo é de 60°F e a constante de proporcionalidade vale $k = -0,04462$, qual é a temperatura do corpo após 10 minutos?

Sabendo que o problema é modelado pela EDO $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$, será utilizado o MDF para aproximar a temperatura do corpo no instante em se passaram os 10 minutos.

Analisando a EDO, tem-se $T' = k(T - T_m)$. Ou, de forma equivalente,

$$T' - kT = -kT_m.$$

Como o problema pede a temperatura após 10 min, o MDF será aplicado para aproximar as soluções no intervalo $[0, 10]$. Para o caso em que $m = 4$, tem-se $h = \frac{10-0}{4} = 2,5$ e então a malha do problema contém os pontos $t_0 = 0$, $t_1 = 2,5$; $t_2 = 5$, $t_3 = 7,5$ e $t_4 = 10$.

Note que $P_i = -k$ e $f_i = -kT_m$. Substituindo em (15), tem-se a EDF dada por

$$-T_{i-1} + T_{i+1} - 2hkT_i = -2hkT_m$$

E substituindo $h = 2,5$; $k = -0,01938$ e $T_m = 100^\circ F$, obtém-se a EDF associada ao problema

$$-T_{i-1} + T_{i+1} + 0,2231T_i = 22,31.$$

Fazendo i variar de um a três se obtém as equações:

$$i = 1: -T_0 + T_2 + 0,2231T_1 = 22,31$$

$$i = 2: -T_1 + T_3 + 0,2231T_2 = 22,31$$

$$i = 3: -T_2 + T_4 + 0,2231T_3 = 22,31$$

Aqui, será necessário utilizar informações que condicionam o problema para diminuir o número de incógnitas. A temperatura inicial de 50°F gera um problema de valor inicial em que $T(0) = 50$ (Zill, 2016). Além disso, a medição feita após

5 minutos, em que a temperatura do corpo é de 60°F, indica que $T(5) = 60$. Sendo assim, tem-se $T_0 = T(0) = 50$ e $T_2 = T(5) = 60$. Substituindo nas equações acima, obtém-se um sistema com três equações a incógnitas T_1, T_3 e T_4 :

$$\begin{cases} 0,2231T_1 & = 12,31 \\ -T_1 + T_3 & = 8,924 \\ 0,2231T_3 + T_4 & = 82,31 \end{cases}$$

A solução do sistema, com valores arredondados, é dada por $T_1 = 55,170$, $T_2 = 64,101$ e $T_4 = 68,009$. Como $T_4 = T(10)$, tem-se então que a temperatura após 10 minutos é de 68,009°F. Já a solução exata da EDO fornece como resposta a temperatura de exatos 68°F. Sendo assim, a aproximação fornecida pelo método numérico é bastante precisa. Vale destacar que a precisão do método aumenta conforme tomado valor de m maior, pois são obtidos sistemas com mais equações e incógnitas que melhoram a resposta numérica da solução (Junior, 2006).

APLICAÇÃO 2: CORPO EM QUEDA LIVRE

Um corpo abandonado de certa altura e deixado em queda livre sofre ação da gravidade (g) e da resistência do ar até chegar ao solo. Como desenvolvido nos trabalhos de Casemiro (2011) e Silva (2014), se considerarmos que $s(t)$ mede a distância entre o ponto inicial de queda e o instante t , pode-se descrever a variação da distância por meio da EDO

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{ds}{dt} = g, \quad (16)$$

onde m é a massa do corpo e k é uma constante relacionada à resistência do ar, a qual pode ser proporcional à sua velocidade instantânea. Note que a modelagem do problema é dada por uma EDO de segunda ordem.

Aplicação em um problema: Um objeto de 1kg é solto de uma altura de 515 metros. Suponha força gravitacional constante, com $g = 9,81m/s^2$, e que a força, devido à resistência do ar, tenha como constante de proporcionalidade $k = 2Ns/m$. Sabendo que o objeto levou o tempo de 1 minutos e 45 segundos para chegar ao solo, qual a sua altura aos 42 segundos após sua queda?

Substituindo os valores do enunciado na equação (16), obtém-se a EDO que descreve o problema do exemplo:

$$s'' + 2s' = 9,81 \quad (17)$$

Para solucionar o problema é necessário analisar as condições que guiam o contexto do enunciado. Uma observação que fornece uma primeira condição de contorno é notar que a distância no instante zero corresponde à posição inicial da trajetória, ou seja, $s(0) = 0$. Além disso, em 105 segundos o objeto percorre 515 metros, o que fornece $s(105) = 515$. Portanto, tem-se um Problema de Valor de Contorno (PVC) dado pela terna $s'' + 2s' = 9,81$; $s(0) = 0$ e $s(105) = 515$.

Para encontrar a posição do objeto ao longo da trajetória em determinado instante, é necessário resolver o PVC (Cunha, 2021). Isto será feito utilizando o método das diferenças finitas.

Para obtenção da EDF, considere o caso geral de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem do tipo $y''(x) + P(x) \cdot y'(x) + Q(x) \cdot y(x) = f(x)$ e suas condições de contorno dadas por $y(a) = c$ e $y(\alpha) = \beta$. A construção do método é análoga ao que foi feito para a EDO de primeira ordem e foi desenvolvida por Zill (2009).

Pondo $y(x_i) = y_i, P(x_i) = P_i, Q(x_i) = Q_i$ e $f(x_i) = f_i$, podemos aproximar a EDO (17) por meio das aproximações das derivadas deduzidas anteriormente em (7) e (8):

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + P(x_i) \frac{-y_{i-1} + y_{i+1}}{2h} + Q(x_i)y_i = f(x_i)$$

E simplificando, obtemos a Equação de Diferenças Finitas para uma EDO de ordem dois:

$$(2 - hP_i)y_{i-1} + (-4 + 2h^2Q_i)y_i + (2 + hP_i)y_{i+1} = 2h^2f_i$$

Para cada i , tem-se uma equação. Fazendo i variar de 1 até $m - 1$, tem-se um sistema de equações lineares com $m - 1$ equações e $m - 1$ incógnitas cuja solução é uma aproximação para a solução da EDO.

Note na equação (17) que $P_i = 2$, $Q_i = 0$ e $f_i = 9,81$. Considerando t variando no intervalo $[0,105]$ e tomando $m = 5$, tem-se $h = \frac{105-0}{5} = 21$. Logo, a malha do intervalo contém os pontos interiores $t_0 = 0, t_1 = 21, t_2 = 42, t_3 = 63, t_4 = 84$ e $t_5 = 105$. Com isso, obtém-se a EDF do problema:

$$-40s_{i-1} - 4s_i + 44s_{i+1} = 2 \times 21^2 \times 9,81$$

Então, para cada $i \in \{1,2,3,4\}$, tem-se uma equação

$$i = 1: -40s_0 - 4s_1 + 44s_2 = 8.652,42$$

$$i = 2: -40s_1 - 4s_2 + 44s_3 = 8.652,42$$

$$i = 3: -40s_2 - 4s_3 + 44s_4 = 8.652,42$$

$$i = 4: -40s_3 - 4s_4 + 44s_5 = 8.652,42$$

Note que $s_0 = s(0) = 0$ e $s_5 = s(105) = 515$. Substituindo nas equações acima, tem-se o sistema de quatro equações a incógnitas s_1, s_2, s_3 e s_4 :

$$\begin{cases} -4s_1 + 44s_2 & = 8.652,42 \\ -40s_1 - 4s_2 + 44s_3 & = 8.652,42 \\ -40s_2 - 4s_3 + 44s_4 & = 8.652,42 \\ -40s_3 - 4s_4 & = -14.007,58 \end{cases}$$

Sua solução, com valores aproximados, é dada por $s_1 = 102,975, s_2 = 206,007, s_3 = 308,987$ e $s_4 = 412,015$.

Para determinar a altura em $t_2 = 42$, basta verificar o valor de $s_2 = s(42) = 206,007$. Portanto, utilizando o MDF, consegue-se o número de 206,007 metros de altura após 42 segundos do momento em que o objeto é solto.

A EDO do problema, por não ser muito complexa, possui solução exata. No quadro 1 está a comparação entre os valores exatos e os valores do MDF nos pontos da malha do intervalo.

Quadro 1 – Comparação entre a solução exata e a solução do MDF.

$s(t)$	Solução exata	Solução MDF	Erro
$s(0)$	0,00000	0,00000	0,000
$s(21)$	103,052	102,975	0,077
$s(42)$	206,057	206,007	0,050
$s(63)$	309,062	308,987	0,075
$s(84)$	412,067	412,015	0,052
$s(105)$	515,000	515,000	0,000

Fonte: Autores.

Note que a aproximação é bastante satisfatória e descreve com precisão a altura do objeto em cada ponto. Tal solução foi aproximada tomando $m = 5$ e construindo um sistema 4×4 . Caso se escolha um valor de m maior, o erro cometido ao aproximar a solução via MDF se torna menor, uma vez que a distância entre os pontos da malha diminui e, assim, consegue mais êxito ao estimar o valor da função em cada ponto interior. Em contrapartida, um valor de m maior gera um sistema linear maior e, portanto, mais trabalhoso.

APLICAÇÃO 3: FLEXÃO DE VIGA

Como aplicação final, será construída a EDF para uma EDO de quarta ordem para aproximar a solução de um problema de flexão de viga.

Dada uma equação do tipo

$$y^{(4)} + P(x)y''' + Q(x)y'' + R(x)y' + S(x)y = f(x)$$

Podemos substituir as derivadas por suas respectivas aproximações dadas pelas equações (10), (9), (8) e (7), obtendo a EDF:

$$\frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{h^4} + P(x_i) \frac{-y_{i-2} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{2h^3} +$$

$$+ Q(x_i) \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + R(x_i) \frac{-y_{i-1} + y_{i+1}}{2h} + S(x_i)y_i = f(x_i)$$

Convencionando a notação $P(x_i) = P_i, Q(x_i) = Q_i, R(x_i) = R_i, S(x_i) = S_i$ e $f(x_i) = f_i$ e realizando manipulações algébricas e simplificando, encontramos a EDF para uma EDO de quarta ordem:

$$(2 - hP)y_{i-2} + (-8 + 2hP + 2h^2Q - h^3R)y_{i-1} + (12 - 4h^2Q + 2h^4S)y_i +$$

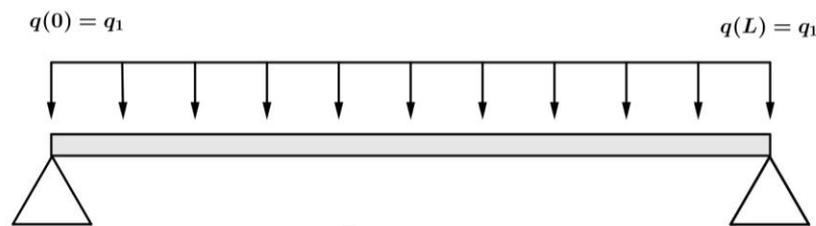
$$(-8 - 2hP + 2h^2Q + h^3R)y_{i+1} + (2 + hP)y_{i+2} = 2h^4f_i \quad (18)$$

Problema de flexão de uma viga:

Como aplicação do MDF para uma EDO de quarta ordem, será resolvido um problema de flexão de uma viga sob carregamento uniforme.

Flexão é um esforço físico em que ocorre uma deformação perpendicular ao eixo do corpo, paralelamente à força atuante. No caso da flexão de uma viga, tem-se uma deformação na direção vertical, perpendicular ao seu eixo horizontal. E então, o problema a ser resolvido tem por objetivo medir o deslocamento que ocorre com a flexão causada na viga por uma carga distribuída de forma uniforme. A figura 1 representa uma viga sob esse tipo de carregamento.

Figura 1 – Viga sob carregamento uniforme.



Note na figura 1 que a viga sob carregamento uniforme tem distribuição de carga $q(x)$ constante em todos os pontos e, em particular, tem-se que $q(0) = q_1$ e $q(L) = q_1$, onde q_1 é uma constante positiva.

Denotando por $w(x)$ o deslocamento vertical sofrido pela viga em cada ponto x , percorrendo o comprimento L da viga. Beer (2011) e Alves (2021) chegam à conclusão que a equação que modela o problema da flexão da viga é a EDO de quarta ordem dada por $\frac{d^4w(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}$, onde q é a carga aplicada, E é o Módulo de Elasticidade e I é o Momento de Inércia das seções retangulares da viga. Porém, como o carregamento é aplicado de cima para baixo, tem-se uma deformação na mesma direção e então $\frac{d^4w(x)}{dx^4} = -\frac{q(x)}{EI}$ (19).

Segundo Silva (2010) e Silva (2021), o Momento de Inércia I de uma seção retangular de uma viga pode ser calculado por meio da fórmula $I = \frac{a^3b}{12}$, onde a é o valor altura e b é o comprimento da base da seção.

As condições de contorno para a flexão de uma viga dependem do tipo de viga que se está falando. O primeiro tipo de viga abordado no trabalho é a viga bi engastada, que tem como característica principal o impedimento da movimentação nas direções normal e paralela ao seu plano de apoio, sendo assim, os apoios são fixos e permitem apenas a rotação da viga (Costa, 2010). Para esse primeiro tipo de viga, tem-se como condições de contorno $w(0) = 0, \frac{dw(0)}{dx} = 0, w(L) = 0, \frac{dw(L)}{dx} = 0$ (Alves, 2021). O segundo tipo de viga abordado é a viga simplesmente apoiada, que é caracterizada por ter um apoio fixo em uma

extremidade e um apoio móvel na outra extremidade (Costa, 2010). Para esse tipo de viga, tem-se as condições de contorno dadas por $w(0) = 0, \frac{d^2w(0)}{dx^2} = 0, w(L) = 0, \frac{d^2w(L)}{dx^2} = 0$ (Alves, 2021).

Para construir a EDF para a EDO (19), pode-se reescrevê-la com a notação $w^{(4)} = -\frac{q(x)}{EI}$, onde nota-se que $P_i = Q_i = R_i = S_i = 0$ e $f_i = -\frac{q_i}{EI}$. Logo, a EDF obtida por meio de (18) é dada por

$$2w_{i-2} - 8w_{i-1} + 12w_i - 8w_{i+1} + 2w_{i+2} = -\frac{2h^4q_i}{EI}$$

E simplificando,

$$w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2} = -\frac{h^4q_i}{EI} \quad (20)$$

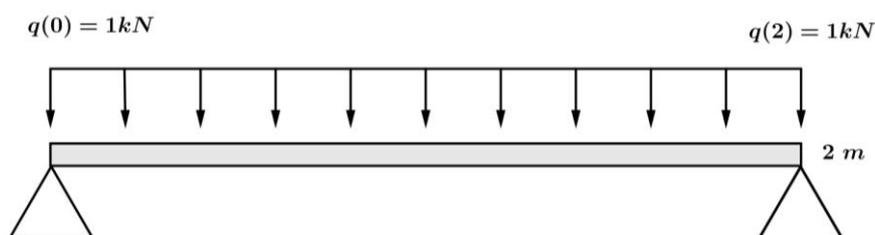
Essa EDF será utilizada na resolução do exemplo abaixo, o qual foi extraído do trabalho de Alves (2001). Após a resolução, será feita a comparação entre o valor exato e o valor aproximado encontrados como solução do problema.

EXEMPLO

Sejam vigas de seção retangular de altura $a = 0,1 m$ e base $b = 0,01 m$ com módulo de elasticidade $E = 100GPa$ e comprimento $L = 2m$, submetidas a uma carga de distribuição uniforme $q_1 = 1kN$ com diferentes condições de contorno. Qual a flexão aplicada nessa viga?

A Figura 2 representa o problema descrito no exemplo:

Figura 2 – Distribuição de carga uniforme.



Fonte: Autores.

Observe na figura acima que a distribuição de carga é constante em cada ponto. Assim, tomando como base essa distribuição, devemos responder o enunciado do problema descrevendo o comportamento da flexão da viga ao longo de seu comprimento de dois metros.

Resolução por meio do Método das Diferenças Finitas:

Inicialmente, deve-se identificar que a distribuição da carga, por ser uniforme, é regida por uma função linear. Suponha então $q(x) = rx + s$:

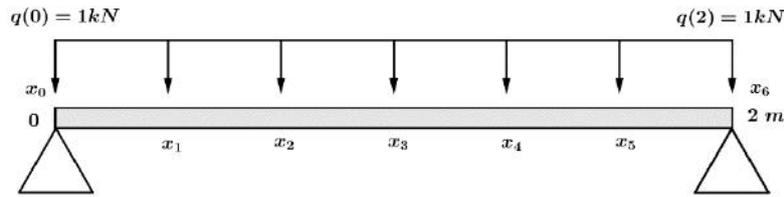
$$q(0) = 1 \Rightarrow r \cdot 0 + s = 1 \Rightarrow s = 1$$

$$q(2) = 1 \Rightarrow r \cdot 2 + 1 = 1 \Rightarrow r = 0$$

Portanto, $q(x) = 1$.

Como o comprimento da viga é de $2m$, tem-se a análise no intervalo $[0, 2]$. Dividindo-o em seis partes, tomando $m = 6$, tem-se $h = \frac{2-0}{6} = \frac{1}{3}$ e então a malha do intervalo é formada pelos pontos $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1, x_4 = \frac{4}{3}, x_5 = \frac{5}{3}$ e $x_6 = 2$. A malha está representada na figura 3.

Figura 3 – Malha do intervalo $[0, 2]$.



Fonte: Autores.

Na Figura 3 podemos notar que a malha divide o intervalo em partes iguais, de mesmo comprimento, e como a quantidade de pontos internos é ímpar e a distribuição é uniforme, teremos então uma espécie de simetria dos valores das soluções que mensuram a flexão da viga.

Por meio da função de distribuição da carga obtém-se $q_i = q(x_i) = 1$.

O módulo de elasticidade $E = 100\text{GPa}$ deve ser transformado para quilo pascal para que haja coerência com as demais unidades de medida. Fazendo a transformação, tem-se $E = 100\text{GPa} = 100 \times 1000\text{kPa} = 10^5\text{kPa}$.

Calculando o Momento de Inércia de cada seção retangular:

$$I = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{10} \right)^3 \left(\frac{1}{100} \right) = \frac{1}{12 \cdot 10^5}$$

Agora, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, utilizando (20), tem-se uma equação:

$$i = 1: w_{-1} - 4w_0 + 6w_1 - 4w_2 + w_3 = -\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 1}{12 \cdot 10^5}$$

$$i = 2: w_0 - 4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4 = -\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 1}{12 \cdot 10^5}$$

$$i = 3: w_1 - 4w_2 + 6w_3 - 4w_4 + w_5 = -\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 1}{12 \cdot 10^5}$$

$$i = 4: w_2 - 4w_3 + 6w_4 - 4w_5 + w_6 = -\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 1}{12 \cdot 10^5}$$

$$i = 5: w_3 - 4w_4 + 6w_5 - 4w_6 + w_7 = -\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 1}{12 \cdot 10^5}$$

Note que foi gerado um sistema 5×9 . Deve-se então aplicar as condições de contorno para diminuir o número de incógnitas (Silva, 2011).

VIGA BI ENGASTADA

Analisando as condições de contorno para esse tipo de viga, tem-se que já são conhecidos $w_0 = w(0) = 0$ e $w_6 = w(2) = 0$. Então, basta encontrar expressões para w_{-1} e w_7 de forma a obter um sistema 5×5 . Utilizando a equação (7) e calculando uma aproximação para $i = 0$, tem-se

$$w_0' = \frac{-w_{-1} + w_1}{2h}$$

E então, isolando w_{-1} , obtém-se

$$w_{-1} = -2hw_0' + w_1$$

Analogamente, fazendo $i = 6$, tem-se

$$w_7 = 2hw_6' + w_5$$

Aplicando as condições de contorno nos dois resultados acima, obtém-se $w_{-1} = w_1$ e $w_7 = w_5$. E então, substituindo w_0, w_6, w_{-1} e w_7 no sistema anterior, chega-se ao seguinte sistema 5×5 :

$$\begin{cases} 7w_1 - 4w_2 + w_3 & = -\frac{4}{27} \\ -4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4 & = -\frac{4}{27} \\ w_1 - 4w_2 + 6w_3 - 4w_4 + w_5 & = -\frac{4}{27} \\ w_2 - 4w_3 + 6w_4 - 4w_5 & = -\frac{4}{27} \\ w_3 - 4w_4 + 7w_5 & = -\frac{4}{27} \end{cases}$$

A solução é dada por

$$w_1 = -0,21604, w_2 = -0,49382, w_3 = -0,61111, w_4 = -0,49382 \text{ e } w_5 = -0,21604.$$

VIGA SIMPLEMENTE APOIADA

Por meio das condições de contorno para esse tipo de viga, tem-se conhecidos $w_0 = w(0) = 0$ e $w_6 = w(2) = 0$. Encontrando expressões equivalentes para w_{-1} e w_7 :

Utilizando a equação (8) e calculando uma aproximação com $i = 0$, tem-se uma expressão para w_0'' :

$$w_0'' = \frac{w_1 - 2w_0 + w_{-1}}{h^2}$$

E então, isolando w_{-1} , obtém-se

$$w_{-1} = h^2w_0'' + 2w_0 - w_1$$

Analogamente, fazendo $i = 6$, tem-se

$$w_6'' = \frac{w_7 - 2w_6 + w_5}{h^2}$$

E então,

$$w_7 = h^2w_6'' + 2w_6 - w_5$$

Aplicando as condições de contorno nos dois resultados acima, obtém-se $w_{-1} = -w_1$ e $w_7 = -w_5$. E então, substituindo w_0, w_6, w_{-1} e w_7 no sistema anterior chega-se ao seguinte sistema 5×5 :

$$\begin{cases} 5w_1 - 4w_2 + w_3 & = -\frac{4}{27} \\ -4w_1 + 6w_2 - 4w_3 + w_4 & = -\frac{4}{27} \\ w_1 - 4w_2 + 6w_3 - 4w_4 + w_5 & = -\frac{4}{27} \\ w_2 - 4w_3 + 6w_4 - 4w_5 & = -\frac{4}{27} \\ w_3 - 4w_4 + 5w_5 & = -\frac{4}{27} \end{cases}$$

A solução do sistema é dada por $w_1 = -1,29629$, $w_2 = -2,22222$, $w_3 = -2,55555$, $w_4 = -2,22222$ e $w_5 = -1,29629$.

Levando em consideração que a EDO do problema da flexão de uma viga pode ser resolvida por métodos analíticos, que fornecem a solução exata, podemos fazer a comparação entre a solução do MDF e a solução real, como mostra o quadro 2:

Quadro 2 – Comparação entre a solução exata e a solução do MDF.

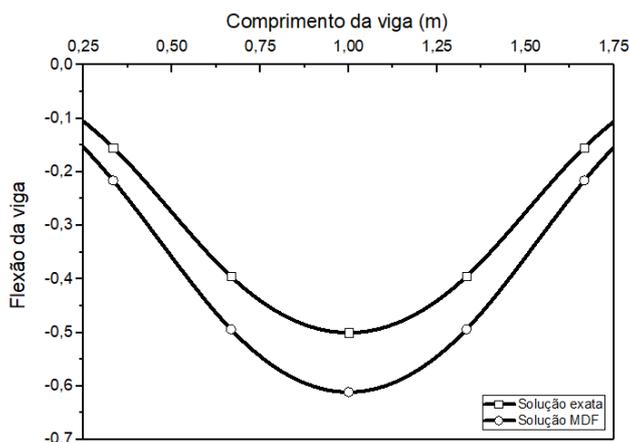
$w(x)$	Viga Bi Engastada			Viga Simplesmente Apoiada		
	Solução exata	Solução MDF	Erro	Solução exata	Solução MDF	Erro
$w(0)$	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
$w(1/3)$	-0,15432	-0,21604	-0,06172	-1,26543	-1,29629	-0,03086
$w(2/3)$	-0,39506	-0,49382	-0,09876	-2,17283	-2,22222	-0,04938
$w(1)$	-0,50000	-0,61111	-0,11111	-2,50000	-2,55555	-0,05555
$w(4/3)$	-0,39506	-0,49382	-0,09876	-2,17283	-2,22222	-0,04938
$w(5/3)$	-0,15432	-0,21604	-0,06172	-1,26543	-1,29629	-0,03086
$w(2)$	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Fonte: Autores.

Note que a aproximação via MDF foi melhor para o caso da viga Simplesmente Apoiada, pois seu erro na aproximação é menor para esse tipo de viga.

A seguir, a Figura 4 contém a representação gráfica das soluções da flexão da viga do tipo Bi Engastada:

Figura 4 – Flexão da viga Bi Engastada.

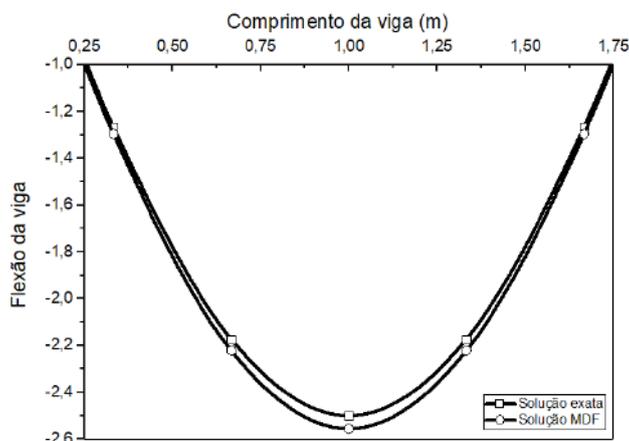


Fonte: Autores.

Perceba na figura 4 que a solução aproximada tem o mesmo comportamento da solução exata, não sofrendo oscilações ou perturbações, mas mantendo-se próximo do valor exato. Note também que, pelo fato de o carregamento ser uniforme, tem-se uma simetria das soluções em relação ao centro da malha do intervalo, formando curvas simétricas ao eixo vertical que passa por x igual a 1.

A Figura 5 mostra a representação gráfica das soluções da flexão da viga do tipo Simplesmente Apoiada.

Figura 5 – Flexão da viga Simplesmente Apoiada.



Fonte: Autores.

Perceba que as curvas das flexões da viga Simplesmente Apoiada assumem formato mais parabólico que no caso da viga Bi Engastada e mantêm aspecto simétrico.

Analogamente ao que foi visto nas duas primeiras aplicações do MDF, nota-se que a aproximação obtida utilizando esse método numérico é bastante assertiva e o erro cometido é bem controlado. Portanto, existe uma boa resposta numérica para a solução de uma EDO utilizando o MDF, visto que os valores se aproximam da solução exata.

4. Considerações Finais

Através da análise dos casos iniciais das aproximações das derivadas de ordem um a quatro foi possível generalizar a expressão de diferenças finitas para a derivada de ordem n . Para isso, foi desenvolvido o processo para determinar os coeficientes dos pontos que compõe a aproximação da derivada, atingindo-se assim o objetivo principal.

Por meio do termo geral da matriz dos coeficientes, desenvolvido nesse trabalho, é possível, com certa facilidade, resolver o sistema de equações e determinar os coeficientes das aproximações do Método das Diferenças Finitas, os quais têm notória relevância, pois são fundamentais para construir a EDF e aproximar a solução de uma EDO linear de qualquer ordem.

As aplicações apresentadas no trabalho para exemplificar a utilização do MDF mostraram que o método é bastante útil para aproximar a solução de uma EDO, sendo assim, tem grande valor na resolução de equações cuja solução não é trivial ou que não possuem solução por meio de métodos analíticos.

Além do que já foi comentado, as comparações entre os valores exatos e os valores dados pelo MDF das soluções das EDO's mostraram que o erro cometido nas aproximações é relativamente pequeno, e, portanto, caracterizam uma boa estabilidade do método, o que é fundamental quando se utiliza qualquer método numérico. De outro ponto de vista, também vale destacar que a aproximação pode melhorar ainda mais, bastando apenas aumentar o número de pontos da malha, garantindo assim a convergência dos valores para a solução real da EDO.

Trabalhos futuros devem contemplar a utilização do método na resolução de Equações Diferenciais Parciais, uma vez que há possibilidade de centrar a análise em um ponto e aproximar a solução de forma semelhante ao que foi feito com as EDO's.

Referências

Alitolef, S. S. (2011). *Algumas Aplicações das Equações Diferenciais*. Universidade Federal de Rondônia – UNIR, Paraná.

Alves, D. (2021). *Teoria de vigas de Euler Bernoulli: Aplicações de Equações Diferenciais na flexão de vigas*. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Matemática) - Universidade de Pernambuco, Garanhuns.

- Aquino, R. M.; Vera-Tutela, C. A. R.; Bastos, J. C. A.; Ventura, S. D.; & Oliveira, R. F. D. (2020). *Modelos Matemáticos, Simulação da Produção e Índice Tecnológico de Municípios do Rio de Janeiro*. TEMA (São Carlos), 21(TEMA (São Carlos), 2020 21(2)). <https://doi.org/10.5540/tema.2020.021.02.0002090209>
- Bassanezi, R. C.; & Ferreira, W. C. (1988). *Equações diferenciais com aplicações*. São Paulo: Harbra.
- Beer, F. P.; Johnston, E. R.; DeWolf, J. T.; & Mazurek, D. F. (2011). *Mecânica dos Materiais*. (5ª ed.). AMGH Editora Ltda.
- Boyce, W. E.; & Diprima, R. C. (2010). *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. LCT, 9ª edição, Rio de Janeiro.
- Campos, F. F. (2007). *Algoritmos Numéricos*. LTC Editora.
- Casemiro, A. A. (2011). *Queda dos corpos e Equações Diferenciais num primeiro curso de Cálculo*. Monografia (Especialização para professores) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Chinchio, A. C. (2012). *Introdução às equações diferenciais ordinárias e aplicações*. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. São Paulo.
- Costa, R. (2010). *Um Estudo de Equações Diferenciais Aplicado à Flexão de Vigas*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica – Unicamp, Campinas.
- Cunha, L. M. (2021). *Estudo das Equações Diferenciais e Aplicações em Modelos na Física*. Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, Minas Gerais.
- Fontana, E. (2019). *Introdução ao Método de Diferenças Finitas com Aplicações em Engenharia Química*. Universidade Federal do Paraná – UFPR, Paraná.
- Guidorizzi, H. L. (2013). *Um curso de Cálculo: volume 4*. (5ª ed.). Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda – LTC.
- Junior, L. C. (2006). *Uma aplicação dos métodos dos elementos finitos e diferenças finitas à interação fluido-estrutura*. Faculdade de Tecnologia – Universidade de Brasília. Brasília.
- Oliveira, E. S. (2023). *Simulações de condução de calor unidimensional com o software Maxima*. Revista Brasileira De Ensino De Física, 45(Rev. Bras. Ensino Fis., 2023 45). <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2022-0181>
- Silva, A. A. (2010) *Momento de Inércia, de Massa ou de Área?* Web Artigos.
- Silva, G. R.; & Schlindwein, M. B. (2021). *Análise não linear de vigas pelos métodos de Branson com uso do software de elementos finitos*. Centro de Ensino Universitário de Brasília (CEUB).
- Silva, J. S. (2014). *Sobre o problema da variação de temperatura de um corpo*. Revista Connection Line.
- Silva, M. A. (2014). *Modelagem Matemática: Equações diferenciais ordinárias em cursos de graduação*. IFSP, São Paulo.
- Silva, P. H. G. da.; Moreira, J.; Costa, A. O. S.; & Costa Jr., E. F. (2020). *Numerical analysis of the thermal profile inside the wall of a rotary cement kiln*. *Cerâmica*, 66(Cerâmica, 2020 66(380)). <https://doi.org/10.1590/0366-69132020663802902>
- Silva, S. F.; & Soares, A. A. (2011). *O método das diferenças finitas aplicado à Teoria das Vigas*. Revista UNAMA.
- Stewart, J. (2013). *Cálculo: volume 2*. (7ª ed.). São Paulo: Cengage Learning.
- Zill, D. G.; & Cullen, M. R. (2009). *Equações Diferenciais*. (3ª ed.). Vol. 2. São Paulo.
- Zill, D. G. (2016). *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. (3ª ed.). São Paulo: Cengage Learning.