

## **O estudo da Clepsidra via Princípio de Cavalieri: uma experimentação didática em geometria espacial utilizando a versão tridimensional do GeoGebra**

The study of the Clepsydra using the Cavalieri's Principle: a didactic experimentation in spatial geometry using the three-dimensional version of GeoGebra

El estudio de la Clepsidra através del Principio de Cavalieri: una experimentación didáctica en geometría espacial utilizando la versión tridimensional de GeoGebra

Recebido: 15/02/2023 | Revisado: 27/02/2023 | Aceitado: 02/03/2023 | Publicado: 08/03/2023

**Nelson Machado Barbosa**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0628-1195>

Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Brasil

E-mail: [barbosa@uenf.br](mailto:barbosa@uenf.br)

**Gilmar Ferreira Fontes**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1544-7708>

Fundação de Apoio à Escola Técnica do Estado do Rio de Janeiro, Brasil

E-mail: [gilferreiracampos50@gmail.com](mailto:gilferreiracampos50@gmail.com)

### **Resumo**

Esta pesquisa teve como objetivo apresentar e analisar uma experimentação didática utilizando a versão tridimensional do GeoGebra, visando o ensino e aprendizagem de Geometria Espacial, em especial, o estudo da Clepsidra via utilização do Princípio de Cavalieri, numa aplicação prática e dinâmica. A pesquisa teve caráter qualitativa, com realização de uma pesquisa de campo, realizada em uma turma do 3º ano do ensino médio do Instituto Federal Fluminense – IFF, localizado na cidade de Campos dos Goytacazes, no Estado do Rio de Janeiro. A experimentação didática baseou-se na metodologia do tipo investigação-ação, e as atividades foram elaboradas com objetivo de desenvolver competências necessárias aos alunos, explorando seu uso numa perspectiva de aperfeiçoamento e superação das dificuldades de aprendizagem encontradas nos estudos das geometrias tridimensionais. Com animações interativas, foi proporcionado o envolvimento entre a tecnologia e a aprendizagem matemática. Assim, pode-se concluir que os conteúdos expostos numa perspectiva dinâmica, facilitou de forma significativa o processo de ensino e aprendizagem em Geometria Espacial.

**Palavras-chave:** Animação interativa; Princípio de Cavalieri; GeoGebra.

### **Abstract**

This research aimed to present and analyze a didactic experiment using the three-dimensional version of GeoGebra, aiming at teaching and learning spatial geometry, in particular, the study of Clepsydra using Cavalieri's Principle, in a practical and dynamic application. The research had a qualitative character, with field research, carried out in a class of the 3rd year of high school at the Fluminense Federal Institute – IFF, located in the city of Campos dos Goytacazes, in the State of Rio de Janeiro. Didactic experimentation was based on the action-research methodology and the activities were designed with the objective of developing skills necessary for students, exploring their use in a perspective of improvement and overcoming the learning difficulties found in the studies of three-dimensional geometries. With interactive animations, the involvement between technology and mathematical learning was provided. It can be concluded that the contents exposed in a dynamic perspective, significantly facilitated the teaching and learning process in spatial geometry.

**Keywords:** Interactive animation; Cavalieri's Principle; GeoGebra.

### **Resumen**

Esta investigación tuvo como objetivo presentar y analizar un experimento didáctica utilizando la versión tridimensional de GeoGebra, con el objetivo de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría Espacial, en particular, el estudio de Clepsidra utilizando el Principio de Cavalieri, en una aplicación práctica y dinámica. La investigación tuvo un carácter cualitativo, con investigación de campo, realizado en una clase del 3º año de la enseñanza media del Instituto Federal Fluminense – IFF, ubicado en la ciudad de Campos dos Goytacazes, en el Estado de Río de Janeiro. La experimentación didáctica se basó en la metodología de investigación-acción, y las actividades fueron diseñadas con el objetivo de desarrollar habilidades necesarias para los estudiantes, explorando su uso en una perspectiva de

superación y superando las dificultades de aprendizaje encontradas en los estudios de geometrías tridimensionales. Con animaciones interactivas se facilitó la implicación entre la tecnología y el aprendizaje matemático. Así, se puede concluir que los contenidos expuestos en una perspectiva dinámica, facilitaron significativamente el proceso de enseñanza y aprendizaje en Geometría Espacial.

**Palabras clave:** Animación interactiva; Principio de Cavalieri; GeoGebra.

## 1. Introdução

A discussão e implantação do uso do software matemático GeoGebra, no ensino de Geometria Espacial como nova metodologia de ensino, têm como objetivo desenvolver competências necessárias aos estudantes, explorando o uso desse software numa perspectiva de aperfeiçoamento e superação das dificuldades de aprendizagem encontradas nos estudos das figuras geométricas tridimensionais, proporcionando o envolvimento entre a tecnologia e a aprendizagem matemática, em uma abordagem que auxilie a compreensão de conceitos e propriedades dessa área do conhecimento.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio - PCNEM (Brasil, 1999), uma das competências a ser desenvolvida é: "[...] reconhecer a informática como ferramenta para novas estratégias de aprendizagem, capaz de contribuir de forma significativa para o processo de construção do conhecimento, nas diversas áreas".

Nesse sentido, o propósito desta pesquisa é propor uma Experimentação Didática salientando a importância do uso do software no processo de ensino-aprendizagem, essencialmente no ensino da Geometria Espacial. Para isso, é utilizado o GeoGebra versão 5.0, que será denominado nessa pesquisa como GeoGebra 3D, sendo este a base metodológica principal, que nos permitirá a criação e a interação com objetos.

A motivação para realização desta pesquisa, foi dada pelo fato que vários estudantes da Educação Básica, desenvolvem certas aversões à disciplina de Geometria Espacial, que cultivada ao longo dos anos, podem evoluir para um total bloqueio desse conteúdo. A visualização tridimensional dos sólidos trabalhados em Geometria Espacial possui significativa importância, pois muitos alunos, em especial do Ensino Médio, possuem dificuldades em visualizar sólidos, planificações, áreas laterais, influenciando em um melhor entendimento de fórmulas para cálculo de áreas, volumes e princípios meramente apresentadas, na maioria das vezes, previamente prontas, excluindo o estudante da compreensão de métodos que demonstram a origem da teoria ou conceito, tornando assim o aprendizado uma atividade mecânica.

Dessa forma, esta pesquisa apresenta uma Sequência de Atividades visando o ensino e aprendizagem em Geometria Espacial, em especial, o estudo completo de alguns sólidos clássicos, dando ênfase no estudo da clepsidra, utilizando uma aplicação do Princípio de Cavalieri. Este princípio baseia-se em afirmar que dois sólidos com a mesma altura possuem volumes iguais se a seções planas de iguais alturas possuírem a mesma área. Em contrapartida, para o estudante compreender melhor este princípio, será utilizada, como mencionado, a clepsidra (ampulheta) como sólidos de referência para o seu aprendizado, proporcionando uma aprendizagem mútua e promovendo uma associação com outros sólidos geométricos clássicos, como cilindro, cone, poliedros e prismas.

Tendo como objetivo apresentar e analisar uma sequência didática visando um processo de ensino-aprendizagem mais eficiente em Geometria Espacial, em especial, uma melhor compreensão do Princípio de Cavalieri e sua aplicação, pensou-se em uma proposta de ensino que permita o desenvolvimento cognitivo atrelado ao uso da tecnologia, nesse caso o GeoGebra 3D, incorporando interatividade e dinamização nas atividades. Com essa finalidade, este artigo apresenta cinco atividades baseadas em uma metodologia ativa, do tipo pesquisa-ação.

Em relação a metodologia do tipo pesquisa-ação, Koerich et al. (2016) afirmam

A pesquisa-ação é um tipo de pesquisa interpretativa que abarca um processo metodológico empírico. Compreende a identificação do problema dentro de um contexto social e/ou institucional, o levantamento de dados relativos ao

problema, à análise e significação dos dados levantados pelos participantes, a identificação da necessidade de mudança, o levantamento de possíveis soluções e por fim, a intervenção e/ou ação propriamente dita no sentido de aliar pesquisa e ação, simultaneamente. (Koerich et al., 2009, p. 717).

Diante do exposto acima, esta pesquisa foi desenvolvida buscando responder a seguinte questão: Como uma Sequência de Atividades específicas, com o auxílio integrado do GeoGebra 3D, imersa em uma metodologia ativa, pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem nos conceitos de Geometria Espacial, em especial, no estudo da Clepsidra e o Princípio de Cavalieri e sua aplicação, para estudantes do 3º ano do Ensino Médio?

Para responder este questionamento, foi aplicado a Sequência de Atividades, juntamente com questionários investigativos, em uma turma do 3º ano do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia Fluminense (IFF) situado na cidade de Campos dos Goytacazes, Estado do Rio de Janeiro.

Através dos questionários investigativos, percebeu-se que a Experimentação Didática proposta, contribuiu significativamente para o aprendizado em Geometria Espacial, em especial o entendimento conciso do Princípio de Cavalieri aplicado no estudo de sólidos clássicos, como a Clepsidra.

## **2. Recursos Computacionais em sala de aula: GeoGebra 3D como recurso complementar em Geometria Espacial**

O uso e a importância das TDIC (Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação) na educação, estão sendo largamente discutidas e consolidadas diante de uma nova sociedade globalizada e habitada por nativos digitais. Por conta disso, pesquisas estão sendo realizadas a respeito das competências da utilização de recursos digitais e seu impacto na educação. Isso ocorre devido à exploração de como as alterações tecnológicas interagem com a aprendizagem.

Já a construção do conhecimento, ocorre de forma mais fluida e concreta com a utilização das TDIC, inclusive, os recursos digitais possuem capacidade para uma melhor aprendizagem cognitiva, ampliando habilidades e aptidões de resoluções de problemas e de pensamento a nível superior e desenvolvendo habilidades físicas e mentais. Segundo Borba e Penteado (2001), "a uma interação entre humanos e não humanos de uma forma que aquilo que é um problema em uma determinada tecnologia passa a ser uma mera questão em outra" (p. 47).

De acordo com Moran (2000), utilizar a tecnologia e educação sem pôr em prática o processo de aprendizagem, não assegura que apenas o seu uso irá solucionar todas as dificuldades educacionais, e que sua utilização seja capaz de contribuir com o avanço dos estudantes, porém como uma boa ferramenta coadjuvante. Entretanto, deve haver um bom preparo prévio do professor ao fazer uso da tecnologia, para que não seja somente um instrumento diferente do envio do conhecimento, como é realizado nas aulas tradicionais, mas que os recursos surtam efeitos, tanto na motivação quanto na construção do conhecimento pelo aluno, com ênfase no processo.

Não se trata de simplesmente substituir o quadro negro e o giz por algumas transparências, por vezes tecnicamente mal elaboradas ou até maravilhosamente construídas num Power Point, ou começar a usar um data show. As técnicas precisam ser escolhidas de acordo com o que se pretende que os alunos aprendam. [...] Não podemos ter esperança de que uma ou duas técnicas, repetidas à exaustão, deem conta de incentivar e encaminhar toda a aprendizagem esperada. (Moran, 2000, p. 146).

A inclusão destes novos mecanismos tecnológicos somente atingirá um propósito maior no mérito educativo, quando a proposta metodológica for a base de sustentação. Existem vários tipos de práticas bem exitosas que vem sendo elaborada durante esses anos, em que a tecnologia é incluída na educação, no entanto, há concordância entre os pesquisadores de que o momento é voltado para uma maior mudança, que deve conter mais que acesso aos mecanismos, mas juntos com um novo

modelo educacional, que possa de fato, oferecer a oportunidade aos alunos para implantarem um conhecimento que seja verdadeiramente significativo para a vida.

A inclusão de softwares ou aplicativos na educação, tem estimulado uma real transformação nos conceitos de ensino e de aprendizagem no Brasil. A quantidade de programas educacionais e as diferentes modalidades do uso computacional revela que a tecnologia pode ser muito útil no processo de ensino-aprendizagem. A evolução do software educacional mostra que os primeiros programas nesta área são versões computadorizadas do que acontece em sala de aula. Contudo, isso é um processo natural que ocorre com a introdução de qualquer tecnologia na sociedade. Primeiramente, ele tenta simular as atividades que acontecem em sala de aula e à medida que este uso se expande, outras variedades de uso do computador irão se ampliando.

É válido destacar, que os computadores atualmente, estão possibilitando uma revolução no processo de ensino aprendizagem. Uma causa óbvia decorre dos alternados tipos de abordagens de ensino que podem ser efetuadas por meio do computador, devido aos vários programas elaborados para auxiliar o processo de ensino-aprendizagem. Contudo, a maior colaboração do computador como meio educacional sucede do fato do seu uso ter instigado o questionamento dos métodos e processos de ensino utilizados.

No que diz respeito a atualidade, a tecnologia vem permitindo aos estudantes uma nova maneira de vivenciar conceitos matemáticos, assim, é fundamental para todos os envolvidos na comunidade de ensino terem clareza da repercussão desses recursos na aprendizagem do aluno. É preciso compreender como esses recursos atingem e colaboram para essa aprendizagem e, ainda, o que os estudantes entendem mediante sua utilização. Os professores necessitam saber as realidades e as possibilidades de aprendizagem nesses tempos de TDIC.

Para uma aprendizagem mais eficiente, os estudantes devem ter uma vivência prazerosa no ensino e na aprendizagem da matemática e a tecnologia deve ser um possível meio para que isso ocorra. Os educadores não devem negligenciar desafiadoras experiências matemáticas aos educandos ou mesmo ensiná-los apenas de maneira tradicional. Em dias atuais, a utilização da tecnologia é uma importante área de pesquisa na educação, principalmente na matemática.

Atualmente, diversas tecnologias, comunicações e recursos facilitadores estão disponíveis, mas em alguns casos o ensino ainda é passado de maneira que a maioria dos estudantes não compreende bem os conteúdos de matemática, em destaque, a Geometria Espacial.

Mesmo utilizando outros recursos do mundo real para ilustrar conceitos durante as aulas, ainda assim, torna-se difícil motivar o interesse e a compreensão, no desenvolvimento de capacidades importantes que possibilite boa parte dos alunos resolverem problemas e lidar com os conhecimentos. E essa apresentação do conteúdo de Geometria Espacial, de acordo com a realidade capaz de despertar o interesse, é uma tarefa difícil enfrentada por diversos professores.

Dessa forma, estando os recursos computacionais cada vez mais presentes no cotidiano e nas escolas, é fundamental que os estudantes se habituem a programas e softwares educacionais específicos para aprofundar e tornar mais expressivo sua aprendizagem em Geometria Espacial. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (Brasil, 1997), quanto aos softwares educacionais:

É necessário que o docente saiba escolhê-los em conformidade com os propósitos que deseja atingir e de sua própria concepção de conhecimento e de aprendizagem, distinguindo os que servem para um trabalho conduzido para testar conhecimentos dos que procuram levar o aluno a interagir com o programa de forma a construir conhecimento. (Brasil, 1997, p. 35).

Ao pretender utilizar os recursos tecnológicos em sala de aula, o professor precisa ter em consideração que os discentes podem trazer bons resultados, mas também levantar alguns problemas capazes de afetar o desempenho e

compreensão dos conteúdos de forma negativa. Assim, para uma aula bem-sucedida, destaca-se a importância de um adequado planejamento, da indispensabilidade de uma preparação por parte dos docentes, de planejar propósitos claros e específicos de maneira que o uso dessas ferramentas computacionais em sala de aula facilite aos estudantes a construção do conhecimento e a realização das atividades propostas de forma significativa.

No relatório sobre tecnologias digitais e educação matemática de Joint Mathematical Council of the United Kingdom, publicado em 2011, Wilson et al. (2011), trazem as seguintes sugestões:

O currículo e a avaliação em matemática escolar devem exigir explicitamente que todos os jovens se tornem proficientes no uso de tecnologias digitais para fins matemáticos. [...] Para ocorrer o desenvolvimento de experiências de aprendizagem enriquecidas tecnologicamente, ao nível da sala de aula, a mudança tem de ser apoiada pelos dirigentes escolares e acompanhada por oportunidades sustentadas de desenvolvimento profissional para os professores. (Wilson et al., 2011, p. 47).

Segundo as autoras, os recursos tecnológicos na educação matemática têm avançado muito, principalmente os softwares educacionais, com a evolução de programas e aplicativos digitais com o intuito na aprendizagem matemática. Todavia, os recursos humanos, os professores e alunos devem receber maior destaque, completando os recursos essenciais para as mudanças. Os docentes, como intermediadores entre os recursos acessíveis e o ensino, os contextos histórico-culturais dos estudantes, seus interesses que têm estado raros, podem ser reparados através do uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, contanto que sua utilização seja um simples complemento para que o professor efetue o mesmo trabalho, porém como tarefa complementar, que altere a maneira de modificar informações em conhecimento pleno. Logo, Carreira e Amado (2015) afirmam que:

Diante desse contexto, não basta levar o computador ou o tablet para a sala de aula; é necessário que se tenha bem definido, anteriormente, o que se pretende fazer com a tecnologia. A utilização da tecnologia em sala de aula difere bastante da utilização que dela fazemos no dia a dia. Dessa forma, o planejamento, a colocação de objetivos, a escolha de materiais, a seleção de tarefas, a antecipação de questões, ganham uma dimensão central na prática do professor com recursos tecnológicos. (Carreira & Amado, 2015, p.13).

De fato os recursos tecnológicos possibilitam aos estudantes investigar os conceitos, de maneira que todos os estudantes, ao seu tempo, entendam os conteúdos por meio da experiências e vários modos de resolução das atividades (como operar, contar, manipular, visualizar), isso tudo com ação direta do docente, que apresenta as atividades e desafios para estimular a ação dos estudantes a respeito dos conceitos, raciocínio, a compreensão, o registro de resultados e a sistematização de conclusões (Carreira & Amado, 2015).

Verifica-se também, que atualmente, a forma de fixação e aprendizagem dos conteúdos de matemática por parte dos alunos estão em constante mudanças. É neste sentido que se propõe nessa pesquisa, com destaque no ensino da Geometria Espacial, atividades didáticas que podem contribuir numa melhora significativa de aprendizado, tornando as salas de aulas mais atrativas e fazendo com que os estudantes possam visualizar e interagir dinamicamente com as figuras tridimensionais, além de dados algébricos para uma melhor compreensão dos conceitos e conteúdos abordados.

Para este intuito, softwares computacionais possuem grande potencial, especificamente, os recursos computacionais atribuídos ao ensino e aprendizagem da Geometria Espacial, pois possibilitam alunos e professores a construções ágeis, eficazes e intuitivas de formas e figuras geométricas, possibilitando análises e interpretações mais precisas.

A análise das formas e figuras geométricas nos programas de geometria dinâmica, fundamentado na Geometria Euclidiana, incita ao raciocínio lógico, proporcionando a investigação de novos conceitos e relações geométricos. Alves et al.

(2005) comprovam que a utilização desses programas enriquece substancialmente o empenho dos estudantes.

Dos vários programas acessíveis de geometria dinâmica, alguns possibilitam a visualização e construção de figuras tridimensionais (3D), o software proprietário CabriGéomètre 3D é um exemplo. Jahn e Bongiovanni (2009) abordam sobre a manipulação e construção de poliedros usando o software Cabri 3D. Alves (2007) expõe uma sequência de justificativas didáticas para as fórmulas de volume dos principais sólidos geométricos mediante o Princípio de Cavalieri, fazendo uso do software livre Calques 3D designado à aprendizagem da Geometria Espacial.

Nesta premissa, o software GeoGebra possibilita a elaboração de ferramentas de aprendizagem para descoberta e análise de alguns conceitos matemáticos por intermédio de recursos digitais dinâmicos e interativos (Cardoso & Sousa, 2011), e pode ser entendido como um programa interativo e ser executado em qualquer navegador, sem necessidade de instalação. O Geogebra é um software de geometria dinâmica que combina vários aspectos de diferentes pacotes matemáticos (Hohenwarter & Jones, 2007).

Nesta pesquisa, foi utilizado o GeoGebra 3D (versão 5.0). Relativamente recente na comunidade científica, o GeoGebra 3D possibilita a construção, visualização e exploração de figuras tridimensionais. Essa atual versão inclui várias alterações, como: a adaptação de recursos para visualização 3D – pontos, vetores, linhas, segmentos, raios, polígonos e círculos – além de novos objetos, dentre eles: superfícies, planos, prismas, pirâmides, cilindros cones e esferas.

A partir dessa versão, a ferramenta 3D foi aprimorada através da criação de novos comandos, possuindo também comandos no campo de entrada para rotação em torno de eixo e reflexão de objetos. Além disso, há a possibilidade de assinalar os pontos de interseção entre um plano ou linha e um segmento ou polígono, dentre outros, inclusive assinalar o ponto central de uma quádriga.

Já na educação atual, é notável que no ensino da Geometria Espacial, os estudantes apresentem dificuldades referentes a problemas que necessitam a mobilização de habilidades espaciais e atividades que exijam a compreensão da representação bidimensional de objetos tridimensionais. Esta pesquisa expõe uma Sequência Didática que explora conceitos da Geometria Espacial através do uso do software GeoGebra 3D. A proposta objetiva motivar o desenvolvimento do raciocínio Geométrico Espacial, através da utilização das ferramentas de representação que se tem no programa, em especial, o que relaciona a interação dinâmica e animações entre as representações da construção tridimensional.

A discussão e implantação do uso dos softwares matemáticos, no ensino de Geometria Espacial como nova metodologia de ensino, tem como objetivo desenvolver competências necessárias aos alunos, explorando o uso do software Geogebra 3D em uma perspectiva de aperfeiçoamento e superação das dificuldades de aprendizagens encontradas nos estudos das figuras geométricas tridimensionais. Dessa forma, as atividades propostas nesta pesquisa, proporciona o envolvimento entre a tecnologia e a aprendizagem matemática, em particular o estudo completo de sólidos clássicos, como a Clepsidra, juntamente com o Princípio de Cavalieri, em uma abordagem que auxilie a compreensão de conceitos e propriedades dessa área do conhecimento.

Outro propósito deste trabalho é apresentar uma experimentação a comunidade científica, através de uma Sequência de Atividades específicas em Geometria Espacial, que leve o estudante a entender conceitos e postulados de forma dinâmica e interativa através do software GeoGebra 3D. O estudante será capaz de compreender e salientar a importância do uso do software no processo de ensino-aprendizagem, essencialmente no ensino da Geometria Espacial, tendo como metodologia atividades investigação-ação com aplicação em sala de aula.

Segundo os PCNEM (Brasil, 1999), uma das competências a ser desenvolvida é: "[...] reconhecer a informática como ferramenta para novas estratégias de aprendizagem, capaz de contribuir de forma significativa para o processo de construção do conhecimento, nas diversas áreas" (p. 20).

### 3. Metodologia

As atividades propostas nesta pesquisa, propõem problemas para os estudantes testarem hipóteses e conjecturas de modo dinâmico e interativo, colaborando para uma melhor exploração, investigação e argumentação dos pesquisadores.

Os aspectos metodológicos se baseiam na pesquisa de campo, do tipo Intervenção Pedagógica, numa abordagem qualitativa através dos questionários investigativos, com a qual os pesquisadores são capazes de verificar a realidade investigada com simultaneidade em participar do processo em sua totalidade. Segundo Damiani, et al. (2013), “a intenção é descrever detalhadamente os procedimentos realizados, avaliando-os e produzindo explicações plausíveis, sobre seus efeitos, fundamentadas nos dados e em teorias pertinentes” (p. 59).

Para Lehfeld (2007), a pesquisa é considerada como sendo a inquisição, o procedimento sistemático e intensivo, que tem por finalidade descobrir e interpretar fatos que estão inseridos em uma determinada realidade.

Sendo assim, a metodologia utilizada foi do tipo investigação-ação, com a qual o pesquisador é capaz de verificar a realidade investigada com simultaneidade em participar do processo em sua totalidade. Conforme Elliott (1990), a investigação-ação é um tipo de metodologia de investigação direcionada a proporcionar progresso às práticas nos variados campos da ação alcançando resultados melhores e, ainda, simplificar o aperfeiçoamento dos indivíduos e de toda coletividade com que se trabalha. A respeito da metodologia qualitativa empregado neste trabalho, Creswell (2007) afirma que está "se baseia em dados e usa estratégias diversas de investigação" (p. 184).

Vale ressaltar, que a utilização da investigação matemática é um meio para auxiliar o educando na elaboração de seu conhecimento, possibilitando que este indivíduo se torne autônomo. Essa dinâmica aprimora variados processos matemáticos. Uma atividade investigativa proporciona ao estudante aprimorar aptidões como intuir, experimentar, explorar, abstrair, conjecturar, formular, testar, generalizar e demonstrar.

Uma investigação matemática, segundo Ponte et al. (2003), sucede geralmente por meio da aplicação de um problema. Ao buscar resolvê-lo, pode-se encontrar descobertas que se revelam tão valorosas até mesmo mais que a própria solução do problema, visto que mesmo não o solucionando consiga-se construir conhecimentos através do processo percorrido em busca de sua solução.

Mediante a investigação, os estudantes são requisitados a indagar, discutir e estabelecer correspondências através da realidade em uma circunstância real. Assim, estes sujeitos começam a observar, registrar e documentar as atividades vistas em aula levando em consideração as próprias experiências.

As Sequências de Atividades, propostas nesta pesquisa, são atividades matemáticas, em específico, de Geometria Espacial, da qual sua execução pode ampliar nos estudantes variadas habilidades de ordem superior. Sua aplicação em aula é de suma importância, visto que provoca uma dinâmica que estabelece novos desafios para os educandos e até mesmo para os educadores.

A utilização da investigação em Geometria Espacial nesta pesquisa, foi separada em quatro períodos simultâneos. No primeiro momento, realizou-se a exploração e formulação de atividades. No segundo, observou-se a ordenação dos dados e as conjecturas. No terceiro, ocorreu a execução de testes e refinamento das conjecturas. E por fim, no quarto e último momento, realizou-se a justificativa das conjecturas, suas demonstrações e a avaliação do raciocínio.

Durante a aplicação dos quatro instantes citados anteriormente, podem ocorrer interações entre os envolvidos na resolução do problema proposto. Porém, a interação é obrigatória ao fim da dinâmica para que aconteça a explanação dos resultados encontrados. O envolvimento e interação constante do aluno são fundamentais para que ocorra a eficiente aprendizagem da Matemática envolvida, visto que ao investigar, o aluno torna-se um detetive matemático, caso realize este trabalho de maneira autônoma.

A experimentação da pesquisa foi realizada no primeiro semestre letivo do ano de 2018, com aplicação no Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia Fluminense (IFF). Os participantes foram os alunos do 3º ano do Ensino Médio, com um total de 28 participantes. As dinâmicas foram abordadas tópicos relativos aos principais sólidos geométricos que são estudados nas aulas de Geometria Espacial no Ensino Médio, visando o entendimento de conceitos, princípios, postulados entre outras, em especial o entendimento do Princípio de Cavalieri e suas aplicações.

Em relação a coleta de dados, conforme Gil (2008), um questionário pode ser definido como uma técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por objetivo o conhecimento, opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas etc.

Nessa perspectiva, foram elaborados dois questionários. O Questionário I, realizado anteriormente as atividades; e o Questionário final, chamado Questionário II, aplicado após todas as atividades. A coleta destes dados serviu para análise qualitativa dos dados. Os resultados dos questionários serão discutidos na seção de resultados, entretanto os mesmos podem ser vistos na íntegra na dissertação de Fontes (2018).

### 3.1 Descrição resumida das Etapas da Pesquisa

Foram produzidas cinco atividades utilizando o software GeoGebra 3D com caráter exploratório-investigativo aplicado no laboratório de informática, além dos dois questionários investigativos supramencionados. A dinâmica das atividades foi executada em quatro encontros de dois tempos aproximados de 50 minutos cada, conforme mostra o Quadro 1:

**Quadro 1 – Cronograma da Pesquisa.**

Tarefa	Descrição das Atividades	Duração
Questionário I	Questionário Investigativo de Avaliação Inicial	20 min
Atividade 1	Sólidos Redondos (cilindro, cone e esfera); Poliedros (prisma e pirâmides)	45 min
Atividade 2	Planificação de sólidos geométricos (prisma, cilindro, cone, pirâmide, e sólidos platônicos)	45 min
Atividade 3	Superfícies cilíndricas e cônicas obtida através da geratriz; Cilindro e cones de revolução	1 h 40 min
Atividade 4	Polígonos regulares; Volume e área lateral de prisma, pirâmide, cilindro e cone	1 h 40 min
Atividade 5	Estudo do Princípio de Cavalieri: (Cálculo de Volumes; estudo da Clepsidra)	1 h 40 min
Questionário II	Questionário Investigativo de Avaliação Final	20 min

Fonte: Autores.

É válido ressaltar que a cada etapa das Atividade da pesquisa o grau de dificuldade foi aumentando de forma gradativa, entretanto, todas elas apresentavam níveis importantes e relevantes para o objetivo da pesquisa.

O Questionário I foi aplicado com os seguintes objetivos:

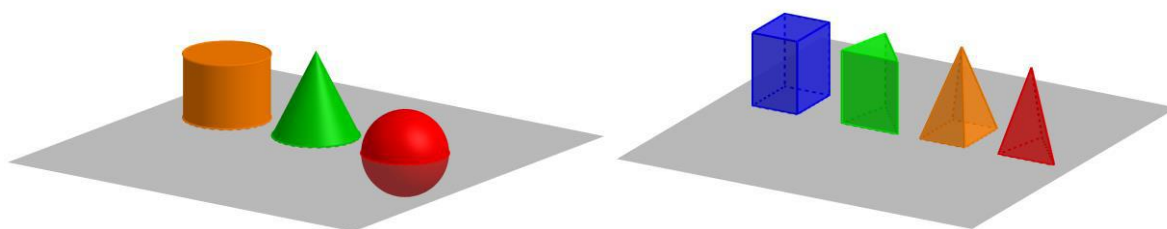
- Conhecer as dificuldades dos estudantes em relação a Geometria Espacial;
- Informar-se das práticas pedagógicas e metodológicas adquiridas até aquele ano de estudo, em relação a Geometria;
- Compreender a visão discente sobre a importância da Geometria Espacial, numa visão geral e específica.

A Atividade 1 se baseia em questionamentos de caráter investigativo, sendo esta, composta por dois arquivos do GeoGebra 3D (Figura 1). O objetivo desta atividade é a obtenção da análise dos estudantes a respeito das características dos sólidos produzidos no software, trabalhando o conceito de "corpos redondos" e "poliedros". Além disso, conceitos como:



adimensional (pontos), unidimensional (retas, semirretas e segmentos), bidimensional (planos e figuras planas) e tridimensional (figuras espaciais no  $R^3$ ), são fornecidos pelos pesquisadores para que os estudantes explorem de forma investigativa a relação entre vértices, arestas, faces e o sólido geométrico como um todo. A interatividade e a dinamicidade gerada pelo GeoGebra 3D foram o diferencial nesse processo de aprendizado.

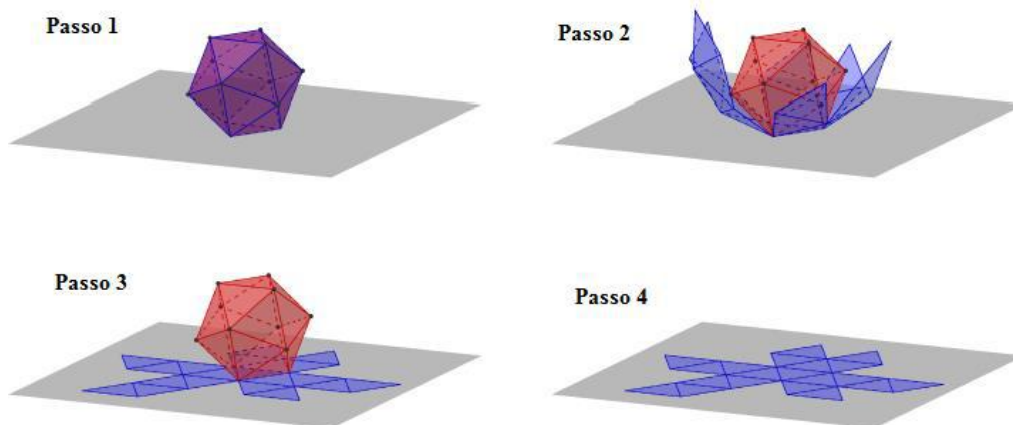
**Figura 1** – Arquivo 1 à esquerda (Sólidos Redondos) e Arquivo 2 à direita (Poliedros).



Fonte: Autores.

Na Atividade 2, os pesquisadores apresentaram para todos os alunos, os arquivos em GeoGebra 3D em que foram trabalhadas planificações de sólidos de forma interativa, através de animação gerada pelo software. A atividade teve como objetivo explorar conceitos de planificações de sólidos como pirâmides, prismas, cones, cilindros e sólidos platônicos. A Figura 2 mostra um exemplo de animação de planificação do icosaedro.

**Figura 2** – Animação da planificação do icosaedro referente à Atividade 2.





Fonte: Autores.


Na Atividade 3, foram aplicados os tutoriais (Quadro 2, por exemplo), passo a passo, para que os estudantes obtivessem, de forma interativa e animada, uma superfície cilíndrica e cônica através do segmento "geratriz"; um cilindro de revolução e um cone de revolução. Todos os arquivos foram realizados através da animação gerada pelo software GeoGebra 3D. Essa atividade tem como objetivo direto: a exploração discente, de forma investigativa, da geratriz das superfícies cilíndricas e cônicas e, também, a investigação dos sólidos geométricos gerados pela rotação e figuras bidimensionais; inclusive a esfera. Além disso, foram trabalhados de forma indireta: conceitos de circunferência, conceitos figuras bidimensionais e tridimensionais, vetores, transladação, rotação de eixos, entre outros.


**Quadro 2** – Tutorial referente a criação animada da superfície cilíndrica de revolução.


1. Abra o arquivo do GeoGebra e siga os passos abaixo para construção de uma *superfície cilíndrica gerado* pela revolução de um segmento:


**1º passo**) Digite " $O = (0,0)$ " na caixa de "Entrada", localizado na parte inferior do programa, em seguida, clique na ferramenta  "Círculo dado Centro e Raio" e defina uma circunferência com centro em  $O$  e raio medindo 2.

**2º passo**) Coloque um "Ponto"  sobre a circunferência do círculo de modo que não coincida com nenhum dos eixos. O programa criará um ponto  $A$ .

**3º passo**) Clique em "exibir", na "Janela de Visualização 3D"  e feche a aba 2D.

**4º passo**) Com a ferramenta  "Vetor", crie um vetor iniciado no ponto  $O$  e indo até 5 no eixo  $z$  (eixo azul). O programa criará vetor e um ponto  $B$  em um de seus extremos.

**5º passo**) Utilizando a ferramenta  "Translação por um Vetor", translade o círculo e translade o ponto  $A$ .

**6º passo**) Construa um "Segmento"  ligando os pontos original ( $A$ ) e o transladado ( $A'$ ). Nesse segmento, clique com o botão direito, habilite o rastro clicando em "Habilitar Rastro" e coloque uma cor de sua preferência clicando em "Propriedade...", em seguida, "Cor", depois escolha a cor de seu agrado.

**7º passo**) Oculte os círculos, o vetor e os pontos  $O$  e  $B$ .

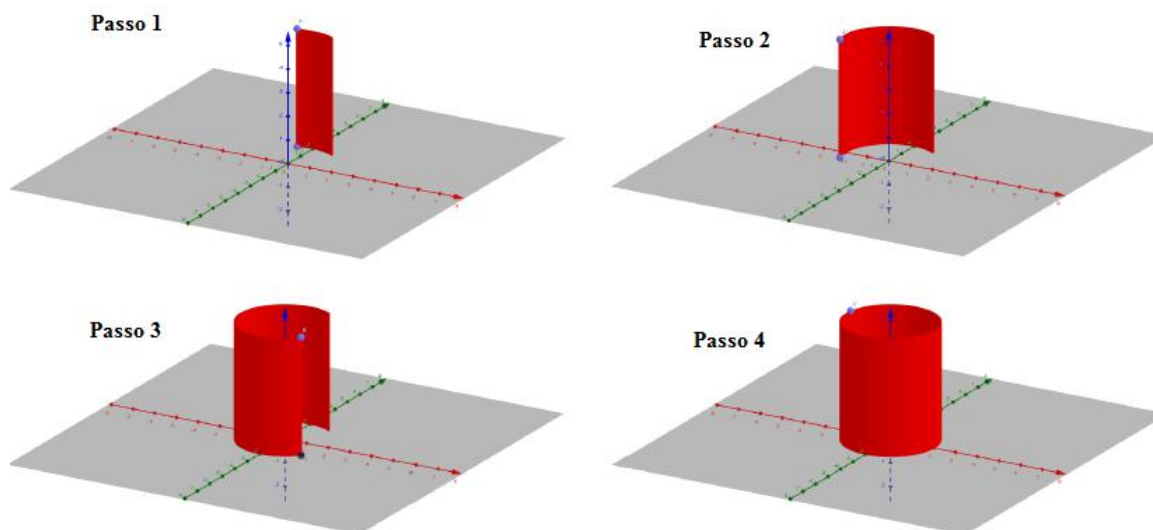
**8º passo**) Por fim, anime o ponto  $A$  clicando-o com o botão direito, em seguida, em "Animar".

**Observe bem a figura antes de iniciar a animação e o que acontece nos primeiros 2 minutos de animação.**

Fonte: Autores.

3. A Figura 3 apresenta a animação referente ao primeiro tutorial (Quadro 2), sendo esta, a primeira etapa da Atividade

**Figura 3** – Animação da superfície cilíndrica gerada através da geratriz.



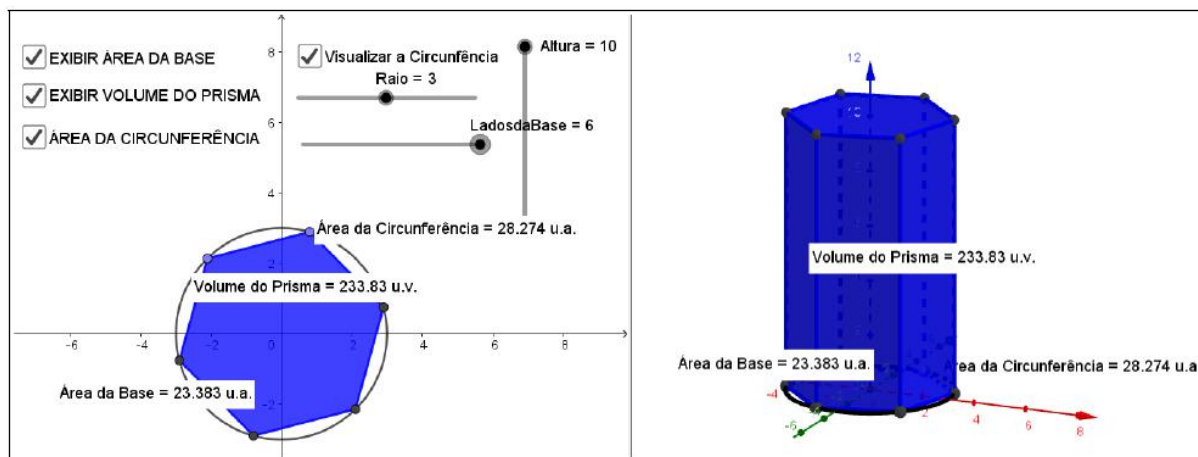
Fonte: Autores.

Na Atividade 4, o nível de dificuldade da pesquisa foi um pouco superior em relação às três atividades antecedentes. Foram expostos por meio do software GeoGebra, no formato 2D (formato bidimensional) vários conceitos e manipulações matemáticas de polígonos regulares, inclusive inscritos a uma circunferência, com objetivo de trabalhar posteriormente, no formato 3D, vários conceitos, com o foco central em deduzir de forma interativa, com animação aderida pelo software,

relações e deduções dos volumes de alguns sólidos geométricos, já pensando no entendimento intuitivo do Princípio de Cavalieri (Atividade 5). E por fim, é apresentado aos estudantes, a comprovação das fórmulas deduzidas, com uma dinâmica diferenciada do formalismo tradicional.

A questão 3 da Atividade 4 por exemplo, onde uma das construções é apresentada na figura 4, teve como objetivo, a descoberta de forma intuitiva, investigativa e interativa dos estudantes, em relação a fórmula do volume do prisma.

**Figura 4** – Obtenção dinâmica do volume do prisma regular de base hexagonal.

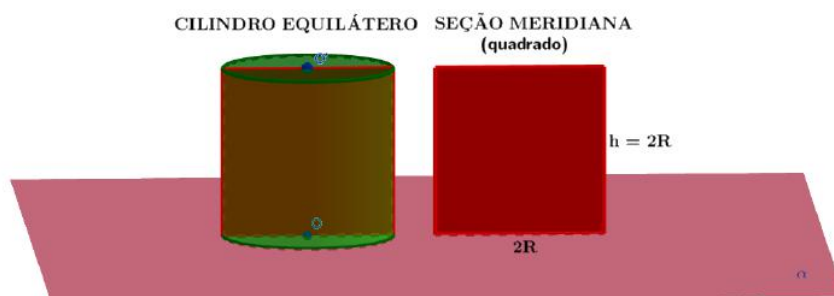


Fonte: Autores.

Por fim a Atividade 5, focou exclusivamente em explorar o conceito do Princípio de Cavalieri de forma intuitiva, interativa e animada por meio do GeoGebra 3D. Essa atividade é composta por 5 etapas (ou questões), com o objetivo de proporcionar uma compreensão mais envolvente do Princípio de Cavalieri, com aplicações práticas, como a dedução da fórmula do volume da esfera, o estudo completo da clepsidra e da anticlepsidra, estudo da seção meridional entre outros aspectos de relevância no campo da Geometria Espacial.

A primeira etapa (questão 1) teve como finalidade definir o conceito de um cilindro equilátero através da seção meridiana, apresentando de forma intuitiva e dinâmica, a fórmula do seu volume. A Figura 5 apresenta o arquivo GeoGebra 3D, que ilustra as definições dos conceitos acima.

**Figura 5** – Conceitos ilustrativos e dinâmicos essenciais para a sequência das Atividades.



Fonte: Autores.

Na segunda etapa (questão 2), foi definido o conceito de clepsidra. Nesta etapa, os estudantes obtêm, de forma dinâmica e interativa, o estudo completo deste sólido, ou seja, a fórmula do seu volume em função do raio  $R$  da base e a área de sua seção transversal em função da sua distância  $d$  ao centro do sólido. Esta questão é apresentada no Quadro 3.

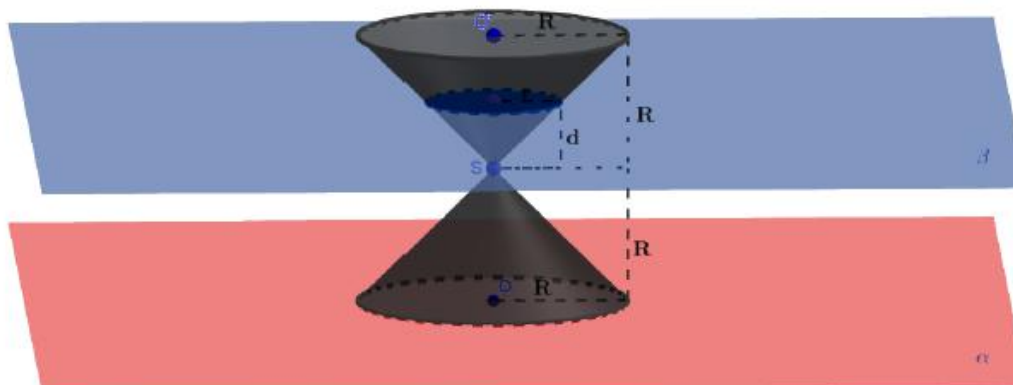
**Quadro 3** – Segunda etapa referente a Atividade 5.

2. Abra o **arquivo 2**, neste arquivo há um sólido sobre um plano  $\alpha$  chamado “clepsidra”. A clepsidra (ampulheta) é obtida pela ligação de dois cones pelos respectivos vértices, ficando suas bases paralelas entre si. A clepsidra vista no arquivo é composta por dois cones tais que  $S$  é o ponto comum aos seus vértices, o raio da base e alturas em ambas é igual a  $R$ . Então:
- a) Qual o volume desta “clepsidra”?
- 
- b) Perceba que um plano  $\beta$  paralelo ao plano  $\alpha$  secciona o cone de cima a uma distância  $d$  do ponto  $S$ , formando assim um cone menor de raio  $r$  e altura  $d$  semelhante ao cone que constitui o sólido em que tem base e alturas em ambas é igual a  $R$ , mas qualquer cone semelhante a um cone que possui raio e altura iguais terá também raio e altura iguais, logo  $r = d$ . Consequentemente, ao seccionar a clepsidra paralelamente as suas bases a uma distância  $d$  do ponto  $S$ , obtêm-se um círculo com raio  $d$ . Assim, qual a área deste círculo?

Fonte: Autores.

O “arquivo 2” mencionado acima é uma clepsidra criada de forma animada no GeoGebra 3D. Este sólido é formado por dois cones idênticos com bases paralelas entre si de centros  $O$  e  $O'$ , ligados pelos seus respectivos vértices  $S$  e ambos com raios da base e alturas com medidas  $R$ . A clepsidra se encontra posicionada sobre um plano  $\alpha$  e seccionada a uma distância  $d$  do ponto  $S$  por um plano  $\beta$  paralelo ao plano  $\alpha$ , gerando assim um círculo de raio  $r$ , formado através desta seção transversal, como mostra a Figura 6.

**Figura 6** – Construção dinâmica e animada da criação da clepsidra.



Fonte: Autores.

Na terceira etapa (questão 3), foi definido o conceito de anticlépsidra. De forma análoga a etapa anterior, foi realizado dinamicamente um estudo completo deste sólido, como mostra o Quadro 4.

**Quadro 4** – Terceira etapa referente a Atividade 5.

**3.** Considere o cilindro equilátero de raio  $R$  e altura  $2R$ , como visto na questão 1, e a clepsidra formada por dois cones de raio e altura  $R$ , como vista na questão 2. Chama-se anticlépsidra o sólido resultante da retirada da clepsidra do cilindro equilátero que a circunscreve, ou seja, é o sólido que está dentro do cilindro equilátero e fora dos dois cones. Observe a figura ao lado para obtenção de uma melhor visualização a respeito do que foi descrito acima. Em seguida, responda:

clépsidra

anticlépsidra

a) A partir do volume do cilindro encontrado no item b da questão 1 e o volume da clepsidra encontrado no item a da questão 2, qual o volume da anticlépsidra descrita acima?

---

b) Abra o **arquivo 3**, neste arquivo há uma anticlépsidra sobre um plano  $\alpha$ . O plano  $\beta$  é paralelo ao plano  $\alpha$  e secciona o sólido podendo ser movimentado através do controle deslizante nomeado de "seção". Considerando  $d$  a distância entre o plano  $\beta$  ao ponto  $S$ , assim, mediante o que foi visto no item b da questão 2, tem-se que o raio da seção transversal da "clepsidra" é dado pela mesma medida  $d$ .

Logo, a seção transversal gerada na "anticlépsidra" é formada por uma coroa circular com raio maior medindo  $R$  (raio da seção no cilindro) e o raio menor medindo  $d$  (raio da seção na clepsidra). Portanto, qual a área desta coroa circular que foi gerada pela seção transversal da "anticlépsidra" a uma distância  $d$  do ponto  $S$ ?

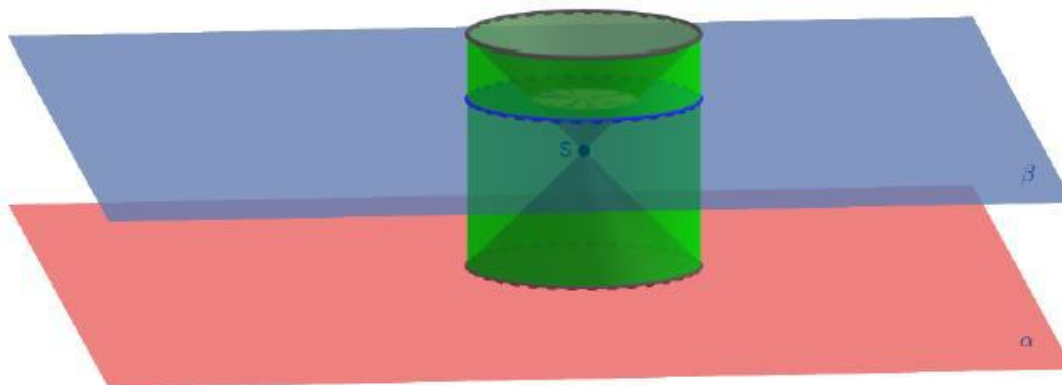
Coroa Circular

Fonte: <https://orcamentos.eu/calculo-de-uma-coroa-circular/>

Fonte: Autores.

O "arquivo 3" mencionado nesta atividade é uma anticlépsidra, criada de forma animada no GeoGebra 3D, como mostra a Figura 7. A anticlépsidra é obtida pelo sólido formado pela ausência da clepsidra no cilindro equilátero.

**Figura 7** – Construção dinâmica e animada da criação da anticlepsidra.



Fonte: Autores.

A quarta etapa desta atividade (Quadro 5) tem como finalidade, definir a área seção transversal de uma esfera de raio  $R$  a uma distância  $d$  de seu centro em função de  $R$  e  $d$ . Esta atividade é introdutória e imprescindível para a realização da próxima etapa da Atividade 5, onde será obtido do volume da esfera via o Princípio de Cavalieri. Detalhes específicos desta etapa pode ser visto na íntegra em Fontes (2018).

**Quadro 5** – Quarta etapa referente a Atividade 5.

4. Considere uma esfera de raio  $R$  seccionada por um plano secante, formando assim um círculo de raio  $r$ , sendo  $d$  a distância do centro da esfera ao centro deste círculo. Desta forma, quando o plano passa pelo centro da esfera tem-se  $d = 0$  e  $r = R$ , mas em qualquer outro caso, um plano secante forma um triângulo retângulo de catetos  $d$  e  $r$  com hipotenusa  $R$ , como mostra a figura ao lado.

<http://matematica206.blogspot.com/2011/12/introducao-esfera-esfera-e-um-solido.html>

Então, pela relação do Teorema de Pitágoras, obtém-se que:  $R^2 = d^2 + r^2$ , que implica que,  $r^2 = R^2 - d^2$ . Utilizando essa uma equação, determine qual a área do círculo que é dado pela seção em função somente da uma distância  $d$  e raio  $R$  da esfera?

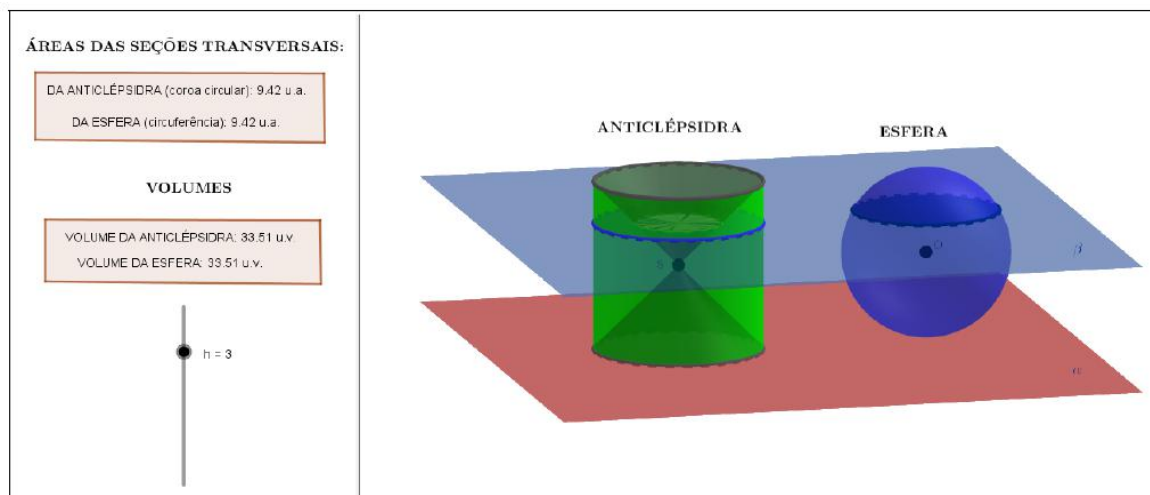
Fonte: Autores.

Por fim, a quinta etapa (questão 5), é realizada a partir das quatro etapas anteriores. Nesta etapa será obtida a fórmula do volume da esfera, de forma interativa e animada utilizando o GeoGebra 3D. Será utilizado uma aplicação clássica do Princípio de Cavalieri, envolvendo o estudante numa série de conhecimento de princípios e proposições de forma intuitiva e inerente.

Inicialmente será necessário solicitar aos estudantes abram o "arquivo.4", Figura 8. Neste arquivo há uma construção animada da anticlepsidra, com centro em  $S$  e uma esfera de centro  $O$  e raio  $R$ , ambas possuem a mesma altura  $2R$ . Esses dois sólidos se encontram posicionados sobre um plano  $\alpha$  e são seccionados simultaneamente a uma distância  $d$  de seus centros  $S$  e  $O$  por um plano  $\beta$  paralelo ao plano  $\alpha$ , formando assim duas seções transversais que deverão ser discutidas ao longo da questão. Na janela 2D possui um controle deslizante nomeado de " $h$ " que altera a altura do plano  $\beta$ . A partir dessa alternância,

os valores das áreas das seções e os volumes da anticlépsidra e da esfera era fornecido pelo software.

**Figura 8** – Obtenção da fórmula do volume da esfera via Princípio de Cavalieri.



Fonte: Autores.

O Questionário II teve como objetivo avaliar o aprendizado proporcionado pela pesquisa e compará-las ao desempenho inicial dos estudantes. O propósito central foi avaliar se os recursos computacionais atrelados a sequência de atividades apresentados a eles, ofereceram uma melhor visão e entendimento da Geometria Espacial em especial, as compreensões de princípios geométricos básicos via o Princípio de Cavalieri, e se a inserção desses recursos ocasionou uma ampliação e facilitação ao estudo de Geometria.

As Atividades acima descritas, assim como os questionários investigativos e os Arquivos elaborados pelo GeoGebra 3D, podem ser vistos e adquiridos na íntegra, em Fontes (2018).

#### 4. Resultados

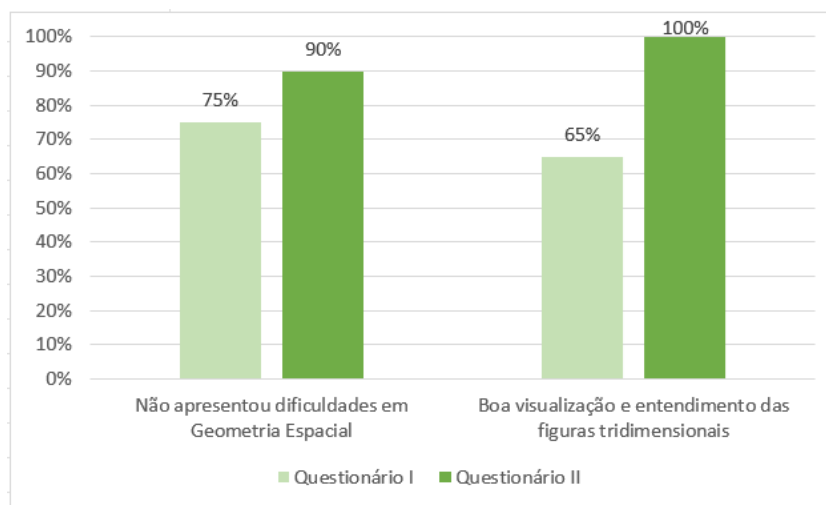
Os resultados dessa pesquisa foram baseados na experimentação dos Questionários Investigativos (Questionário I e II). Participaram da pesquisa 28 estudantes, nos quais por princípios éticos, suas identificações foram preservadas.

Neste artigo será abordado apenas alguns questionamentos de maior relevância na pesquisa, sendo eles:

- 1- Dificuldades que os estudantes apresentam na aprendizagem dos conteúdos de Geometria Espacial;
- 2- A pesquisa proporcionou um aprendizado diferenciado em Geometria Espacial?
- 3- A utilização do software GeoGebra 3D foi fundamental para o ensino-aprendizagem dos conteúdos apresentados na Experimentação Didática?

Os questionários referenciados neste trabalho, poderão ser vistos na íntegra em Fontes (2018). A Figura 9 apresenta o primeiro resultado deste questionamento.

**Figura 9** – Resultado a referente ao questionamento: “Dificuldades que os estudantes apresentaram na aprendizagem dos conteúdos de Geometria Espacial.”

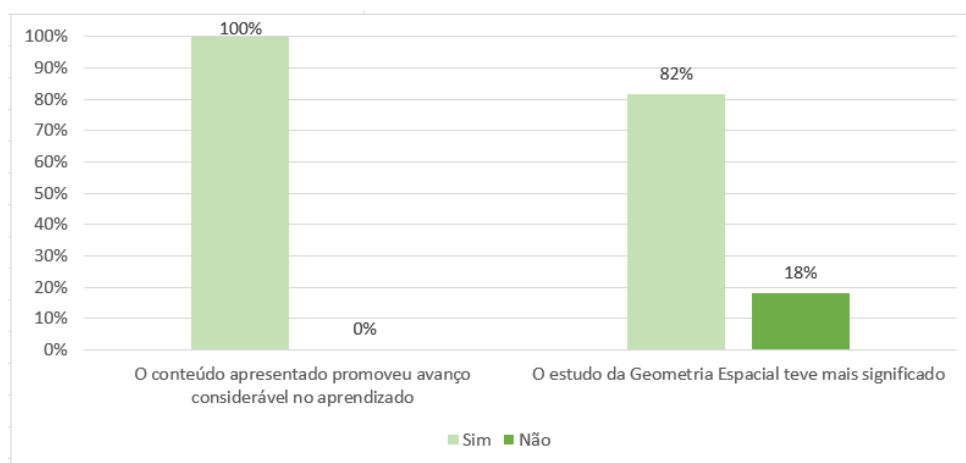


Fonte: Autores.

Com base na Figura 9, observa-se um aumento significativo de estudantes que afirmaram não apresentar dificuldades nos conteúdos apresentados no conteúdo de Geometria Espacial. Em relação a visualização e entendimento de figuras tridimensionais, todos os 28 estudantes apresentaram de forma satisfatória esses quesitos.

A Figura 10 apresenta o resultado referente ao impacto da sequência de Atividades propostas na pesquisa.

**Figura 10** – Resultado a referente ao questionamento: “A pesquisa proporcionou um aprendizado diferenciado em Geometria Espacial?”



Fonte: Autores.

Observa-se na figura acima que 82% dos estudantes afirmaram que o estudo da Geometria Espacial teve mais significado depois da experimentação. O sucesso dos resultados está atrelado a uma experimentação didática dinâmica e interativa, envolto do software GeoGebra.

Em relação ao software, foi questionado aos pesquisados: “A utilização do software GeoGebra 3D foi fundamental para o ensino-aprendizagem dos conteúdos apresentados na sequência das Atividades?”, dos pesquisados, 100% alegaram que



o recurso computacional utilizado na Experimentação Didática, ocasionou um avanço considerável no aprendizado de Geometria Espacial, em um melhor entendimento dos princípios e proposições de uma forma diferenciada, interativa e dinâmica. Esse resultado corrobora com a pesquisa de Silva e Victer (2018) que diz

A ideia de agregar o GeoGebra na versão 5.0 se ajustou bastante propícia ao conceito da geometria tridimensional, pois o software permite gerar sólidos de revolução a partir da janela 3D, onde é possível construir sólidos espaciais, como prismas, pirâmides, cones, cilindros, esferas e outros. A apresentação do programa despertou a participação interativa dos alunos, o que dinamizou a abordagem dos conceitos geométricos. (Silva & Victer, 2018, p. 47).

Diante do exposto, conclui-se que os resultados foram satisfatórios. A análise dos dados levantados, das justificativas e das respostas das atividades, permitiram confirmar que a Experimentação Didática propostas nesta pesquisa, integrado com o software GeoGebra 3D, contribuíram significativamente para a construção do conhecimento na área de Geometria Espacial, em especial no entendimento intuitivo e dinâmico sobre Princípios, Proposições e fórmulas geométricas.

## 5. Considerações Finais

Esta pesquisa teve como objetivo a implementação de uma Experimentação Didática com o uso integrado do software GeoGebra 3D, em uma turma do 3º ano do ensino médio, visando o ensino-aprendizagem de tópicos relevantes da Geometria Espacial. Vale ressaltar que a pesquisa dos recursos pedagógicos a serem utilizados possibilitou um estudo sobre as TDIC, sobre a Metodologia investigação-ação e sobre Princípios e Proposições inerentes ao entendimento mais amplo do processo de ensino e aprendizagem em Geometria Espacial.

Pode-se perceber nesta pesquisa que as atividades imersas numa visualização tridimensional, interativa e animada foram fundamentais para que os estudantes conseguissem compreender a dedução de fórmulas, princípios e proposições.

Com a realização da pesquisa de campo, foi possível desenvolver competências necessárias aos pesquisados, através da aplicação de cinco atividades com a utilização ampla e integrada do GeoGebra 3D. Nessas atividades, o uso do programa foi explorado numa perspectiva de aperfeiçoamento e superação das dificuldades de aprendizagem encontradas na visualização e no entendimento nos estudos das figuras geométricas tridimensionais, em especial, o estudo completo da esfera e da clepsidra utilizando o Princípio de Cavalieri, conteúdos de relevância no campo da geometria pouco difundidos no Ensino Médio.

Respondendo à questão de pesquisa, foi possível constatar que a Sequência de Atividades propostas, utilizando o GeoGebra 3D como recurso integrado e principal, pode sim, contribuir significativamente para o Ensino da Geometria Espacial, proporcionando reflexões intuitivas sobre proposições, princípios e fórmulas geométricas, contribuindo para um aprendizado permanente, por meio das visualizações animadas e interativas geradas pelo software. Pode-se afirmar, diante das observações feitas e da análise geral das atividades, que a aprendizagem do tema aconteceu de forma satisfatória, onde os pesquisados demonstraram adquirir as habilidades e competências fundamentais a serem desenvolvidas no campo da Geometria Espacial.

Dessa forma, diante dos resultados apresentados, juntamente com as motivações expressadas pelos pesquisados durante o trabalho, pode-se concluir que os conteúdos expostos numa perspectiva diferente da tradicional, facilitou de forma significativa o processo de ensino e aprendizagem, proporcionando através do envolvimento entre a tecnologia e a aprendizagem matemática, em particular a Geometria Espacial, proporcionando um despertar no interesse por parte dos pesquisados, aguçando suas curiosidades e desenvolvendo habilidades muitas vezes não exploradas quando os conteúdos são abordados sem uso destes recursos.

Entretanto, a relevância deste trabalho contribui também para uma reflexão sobre a prática pedagógica nas aulas de

Geometria Espacial, no sentido de promover o ensino dos conteúdos relacionados a este eixo da matemática, recorrendo a constante busca por novos recursos, novas ferramentas que sejam capazes de despertar um interesse maior por parte dos estudantes, sendo trabalhados de forma prazerosa, num ambiente cada vez mais presente no cotidiano estudantil, contribuindo de forma positiva para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

Como trabalhos futuros, pretende-se expandir a experimentação didática visando a promoção do ensino e aprendizagem da Geometria Analítica Espacial, oferecendo suporte didático-pedagógico a estudantes e professores para os estudos das Quádricas, do Cálculo Diferencial e Integral de Várias Variáveis e da Geometria Diferencial.

Espera-se, com a pesquisa desenvolvida, estar semeando ideias da importância da criação de sequências didáticas integradas aos recursos tecnológicos, visando a construção de conhecimentos matemáticos na comunidade científica.

## Agradecimentos

À Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, à Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro e o Instituto Federal Fluminense, pelo apoio e/ou recursos destinados para a realização desta pesquisa.

## Referências

- Alves, G. S. (2007). Um estudo sobre o desenvolvimento da visualização geométrica com uso do computador. In: Anais do XVIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação. p. 1–10.
- Alves, G. S., Soares, A. B. & Lima, C. (2005). Um estudo sobre o desenvolvimento do raciocínio espacial no ensino médio através da utilização do software calques 3d. In: Anais do XXV Congresso Brasileiro de Informática na Educação. p. 2815–2823.
- Borba, M. C. & Penteado, M. G. (2001). *Informática e Educação Matemática*. Ed. Autêntica.
- Brasil. (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental (MEC/SEF).
- Brasil. (1999). Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental (MEC/SEF).
- Cardoso, A. & Sousa, J. J. C. (2011). Conteúdos didáticos digitais para aprendizagem de funções. In: Anais do XXII Congresso Brasileiro de Informática na Educação. p. 371–379.
- Carreira, S. P. G. & Amado, N. M. P. (2015). *Explorando a Matemática com Aplicativos Computacionais*. Ed. Univates.
- Creswell, J. W. (2007). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativos, quantitativos e misto*. Ed. Artmed.
- Damiani, M. F., Rochefort, R. S., de Castro, R. F., Dariz, M. R. & Pinheiro, S. S. (2013). Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. *Cadernos de Educação*, 45, 57 – 67. <https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/view/3822>.
- Elliott, J. (1990). *La investigación-acción en educación*. Ed. Morata.
- Fontes, G. F. (2018). *Utilização lúdica do software GeoGebra 3D como ferramenta facilitadora no ensino e aprendizagem de geometria espacial*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes.
- Gil, A. C. (2008). *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social*. Ed. Atlas.
- Hohenwarter, H. & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and álgebra: The case of geogebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27 (3) p.126–131. <https://www.researchgate.net/publication/239830609>.
- Jahn, A. P. & Bongiovanni, V. (2009). Computador na sala de aula: algumas possibilidades do software cabri 3d para o estudo da geometria espacial. *Revista do Professor de Matemática*, 69, p. 50–54. <https://rpm.org.br/cdrpm/69/11.html>.
- Koerich, M. S., Backes, D. S., Sousa, F. G. M., Erdmann, A. L. & Albuquerque, G. L. (2009). Pesquisa-ação: ferramenta metodológica para a pesquisa qualitativa. *Revista Eletrônica de Enfermagem*, 11(3), 717–723. <http://www.fen.ufg.br/revista/v11/n3/v11n3a33.htm>.
- Lehfeld, N. S. (2007). *Metodologia e conhecimentos científicos: horizontes virtuais*. Ed. Vozes.
- Moran, J. (2000). *Novas Tecnologias E Mediação Pedagógica*. Ed. Papirus.
- Ponte, J., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2020). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Ed. Autêntica.
- Silva, Q. de O. V. & Victor, E. F. (2018). O GeoGebra 3D na abordagem de sólidos tridimensionais: uma proposta para estudantes e professores. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo* 7(3), 34-48. <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/36910>.
- Wilson, A. C., Oldkow, A. & Utherland, R. E. (2011). Digital technologies and mathematics education. *Joint Mathematical Council of the United Kingdom*. [http://www.jmc.org.uk/documents/JMC\\_Report\\_Digital\\_Technologies\\_2011.pdf](http://www.jmc.org.uk/documents/JMC_Report_Digital_Technologies_2011.pdf).