

**Modelo não linear bayesiano aplicado a previsão populacional para os estados  
brasileiros**

**Non-linear bayesian model applied to the population's prediction of states of Brazil**

**Modelo no lineal bayesiano aplicado a pronósticos de población para estados brasileños**

Recebido: 12/06/2020 | Revisado: 29/06/2020 | Aceito: 01/07/2020 | Publicado: 16/07/2020

**Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2515-3292>

Universidade Estadual da Paraíba, Brasil

E-mail: [kleberbarros@cct.uepb.edu.br](mailto:kleberbarros@cct.uepb.edu.br)

**Mácio Augusto de Albuquerque**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0113-9130>

Universidade Estadual da Paraíba, Brasil

E-mail: [marcioaa@uepb.edu.br](mailto:marcioaa@uepb.edu.br)

**Maria da Conceição Lacerda Fernandes**

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3680-9317>

Universidade Estadual da Paraíba, Brasil

E-mail: [mariadaconceicaolacerda@gmail.com](mailto:mariadaconceicaolacerda@gmail.com)

**Resumo**

Nos modelos não lineares os dados são ajustados por meio de uma combinação não linear dos parâmetros. A inferência bayesiana é uma importante ferramenta que pode ser aplicada a este tipo de modelo. Dados de crescimento são essencialmente não lineares, possibilitando assim o uso dessa técnica em suas análises; haja vista que a teoria bayesiana tem grande vantagem de propiciar a previsão de probabilidades de modo direto. Os municípios brasileiros recebem recursos governamentais federais com base em dados estatísticos demográficos coletados a cada dez anos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) como também, com levantamentos feitos periodicamente por amostragens em domicílios, obtendo-se assim informações anuais sobre características demográficas e socioeconômicas da população denominadas por Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD). O objetivo desse trabalho é estimar o crescimento populacional brasileiro nos estados e distrito federal referente aos anos de 2016 e 2020, tendo por base resultados demográficos dos Censos relativos aos anos de 1991, 2000, 2010 e 2012; fazendo-se uso de um modelo assintótico, o

exponencial com três parâmetros. O modelo bayesiano foi utilizado para a estimação dos parâmetros. Com a aplicação de tais técnicas foi possível obter previsões de mudanças no contingente populacional brasileiro por estado, para os respectivos anos (2016 e 2020). As regiões Norte e Centro-Oeste demonstraram um aumento significativo em suas populações. Taxas populacionais menores foram verificadas em regiões litorâneas.

**Palavras-chave:** Inferência bayesiana; Crescimento populacional; Curvas de crescimento.

### **Abstract**

The data are adjusted through a non-linear combination of parameters in non-linear models. Bayesian inference is an important tool that can be applied to this type of model. Growth data is essentially non-linear, thus making it possible to use this technique in your analysis; given that the Bayesian theory has a great advantage of providing the prediction of probabilities in a direct way. Brazilian municipalities receive federal government resources based on demographic statistical data collected every ten years by the Brazilian Institute of Geography and Statistics (IBGE), as well as surveys carried out periodically by sampling in households, thus obtaining annual information on demographic characteristics and socioeconomic status of the population called the National Household Sample Survey (PNAD). The objective of this work is to estimate the Brazilian population growth in the states and federal district for the years 2016 and 2020, based on the demographic results of the Censuses for the years 1991, 2000, 2010 and 2012; making use of an asymptotic model, the exponential with three parameters. The Bayesian model was used to estimate the parameters. With the application of such techniques, it was possible to obtain predictions of changes in the Brazilian population contingent by state, for the respective years (2016 and 2020). The North and Midwest regions showed a significant increase in their populations. Lower population rates were seen in coastal regions.

**Keywords:** Bayesian Inference; Populational growth; Growth curves.

### **Resumen**

En los modelos no lineales, los datos se ajustan a través de una combinación no lineal de parámetros. La inferencia bayesiana es una herramienta importante que se puede aplicar a este tipo de modelo. Los datos de crecimiento son esencialmente no lineales, lo que permite utilizar esta técnica en su análisis; dado que la teoría bayesiana tiene una gran ventaja al proporcionar la predicción de probabilidades de manera directa. Los municipios brasileños reciben recursos del gobierno federal basados en datos estadísticos demográficos recopilados

cada diez años por el Instituto Brasileño de Geografía y Estadística (IBGE), así como encuestas realizadas periódicamente por muestreo en hogares, obteniendo así información anual sobre características demográficas y estado socioeconómico de la población llamada Encuesta Nacional de Muestra de Hogares (PNAD). El objetivo de este trabajo es estimar el crecimiento de la población brasileña en los estados y distritos federales para los años 2016 y 2020, con base en los resultados demográficos de los Censos para los años 1991, 2000, 2010 y 2012; haciendo uso de un modelo asintótico, el exponencial con tres parámetros. El modelo bayesiano se utilizó para estimar los parámetros. Con la aplicación de tales técnicas, fue posible obtener predicciones de cambios en la población brasileña contingente por estado, para los años respectivos (2016 y 2020). Las regiones del norte y medio oeste mostraron un aumento significativo en sus poblaciones. Se observaron tasas de población más bajas en las regiones costeras.

**Palabras clave:** Inferencia bayesiana; Crecimiento de la población; Curvas de crecimiento.

## 1. Introdução

Os municípios brasileiros recebem recursos governamentais federais com base em dados estatísticos demográficos divulgados pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística). Censos são realizados a cada dez, quando são coletadas diversas características sociodemográficas da população brasileira. Levantamentos amostrais em domicílios denominados de Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) são realizados periodicamente com o intuito de atualizar e estimar o contingente populacional brasileiro (Souza, 2012).

Conforme Neto *et.al* (2013), observou se na análise de dados de crescimento, a utilização de funções matemáticas não lineares tem se mostrado eficientes para descrever curvas de crescimento, pelo fato de sintetizarem muitas medidas em alguns parâmetros com significado biológico que colaboram na interpretação e entendimento do fenômeno. Uma alternativa altamente eficiente para se trabalhar com dados desta natureza é a Teoria Bayesiana. Segundo Plentz (2003), esta teoria permite calcular a densidade *a posteriori* de uma variável aleatória desejada com base em sua densidade *a priori* e o conjunto de dados.

Para Baiense (2014), o acompanhamento do crescimento populacional mundial sempre teve importância para os governos em diversos momentos da história, observando seus efeitos tanto econômicos quanto sociais; haja vista a existência de uma crença de que a promoção do desenvolvimento sustentável das nações passa por essa ótica em sua logística. Em 2011, o

Fundo de População das Nações Unidas (UNFPA), anunciou que a população mundial seria de 7 bilhões de habitantes. Para a Organização das Nações Unidas (ONU), em 2050 este número chegará a 9,7 bilhões de habitantes, o que dará um acréscimo de aproximadamente 2,1 bilhões de habitantes, alcançando uma taxa de crescimento de 0,33% ao ano. Para 2100 a perspectiva é de que a população mundial chegue a 11,2 bilhões de pessoas. Entretanto, essa tendência de crescimento se dará de maneira diferente nos continentes. Das 2,4 bilhões de pessoas estimadas para ser adicionada a população global no período compreendido entre 2015 e 2050, 1,3 bilhões serão na África. Por conseguinte, na Ásia se dará o segundo maior contingente, apresentando um acréscimo de 0,9 bilhão de pessoas. Segundo este mesmo relatório, a população global está distribuída da seguinte forma: 60% vivem na Ásia (4,4 bilhões), 16% na África (1,2 bilhões), 10 % na Europa (738 milhões), 9% na América Latina e no Caribe (34 milhões), e os restantes 5 % na América do Norte (358 milhões) e Oceania (39 milhões). China (1,4 bilhões) e Índia (1,3 bilhão) continuam a ser os dois maiores países do mundo, ambos com mais de 1 bilhão das pessoas, representando respectivamente 19% e 18% da população do mundo (ONU, 2015).

O crescimento demográfico populacional tornou-se uma variante significativa em estudos científicos dos mais diversos tipos, a nível global. Organismos como a ONU e governos locais vêm desempenhando grandes esforços nesse sentido. Tudo isso porque esta variável está diretamente relacionada com a utilização racional dos recursos naturais, os quais nas últimas décadas vêm se tornando cada vez mais escassos. O Brasil também acompanha com bastante seriedade essa temática, através de instituições como o IBGE; o objetivo é a promoção de maneiras inteligentes de gerenciamento estatal ou privado, na incessante busca pelo desenvolvimento econômico autossustentável (Alves, 2014).

Em 2014, o IBGE estimou a população brasileira em 202,7 milhões de habitantes distribuídos pelos municípios que compõem as 27 Unidades da Federação. Sendo que os três estados mais populosos se localizam na Região Sudeste enquanto os três menos populosos localizam-se na Região Norte. São Paulo aparece como o mais populoso com 44,0 milhões de habitantes, representando 21,7% da população total do país, seguido por Minas Gerais com 20,7 milhões de habitantes (10,2% da população total) e Rio de Janeiro com 16,5 milhões de habitantes (8,1% da população total). O estado de Roraima é o menos populoso com 496,9 mil habitantes (0,2% da população total), seguido do Amapá com 750,9 mil habitantes (0,4% da população total) e Acre com 790,1 mil habitantes (0,4% da população total) (IBGE, 2015).

Entre 2000 e 2010, o crescimento populacional não aconteceu de maneira uniforme entre as grandes regiões e unidades da federação. Sendo que as maiores taxas de crescimento

nesse período foram observadas nas regiões Norte (2,09%) e Centro-Oeste (1,91%). As dez Unidades da Federação que tiveram aumentos consideráveis em suas populações se encontram nas seguintes regiões: Amapá (3,45%), Roraima (3,34%), Acre (2,78%), Distrito Federal (2,28%), Amazonas (2,16%), Pará (2,04%), Mato Grosso (1,94%), Goiás (1,84%), Tocantins (1,80%) e Mato Grosso do Sul (1,66%). De acordo com o IBGE, a componente migratória contribuiu significativamente para esse crescimento. Por outro lado, observa-se que as populações das regiões Sudeste e Nordeste cresceram a um ritmo anual abaixo da média nacional: (1,05%) e (1,07%), respectivamente.

Conforme Alves, 2014, entre 1950 e 2010, o Brasil passou por mudanças interessantes em sua estruturação populacional, o percentual de jovens passou de 41,8 para 24,1. Os idosos passaram de 4,3% para 10,8%. A esperança de vida ao nascer passou de 45,5 para 73,4 anos. A taxa de fecundidade foi de 6,2 filhos por mulher para 1,9. Já a taxa de mortalidade por mil habitantes foi de 19,7 para 6,1, ao passo que a taxa de natalidade que era de 43,5 por mil habitantes foi para 16.

A redução do crescimento populacional, que tem como um dos fatores, baixos índices de fertilidade, leva necessariamente ao envelhecimento da mesma. Com base nas estimativas do relatório da ONU, a taxa de fertilidade globalmente deve cair de 2,5 crianças por mulher no intervalo compreendido entre 2010-2015, para 2,4 no intervalo de 2025-2030 e 2,0 em 2095-2100. Como diz Küchemann (2012), que o Brasil é um país que está envelhecendo rapidamente. Em 2011, a população idosa era de 20,5 milhões, o equivalente a 10,8% da população total. Projeções indicam que, em 2020, a população idosa brasileira será de 30,9 milhões, representando 14% da população total.

O envelhecimento populacional, que se caracteriza pelo aumento da participação percentual dos idosos na população e redução dos demais grupos etários, é um fenômeno já vivenciado em nosso país, tendendo a se intensificar nas próximas décadas. Em 2004, pessoas de 0 a 29 anos de idade eram maioria (54,4%) na população, enquanto em 2014 este indicador caiu para 45,7%. Na contramão, a proporção de adultos de 30 a 59 anos de idade aumentou no período, passando de 35,9% para 40,6%, assim como a participação dos idosos de 60 anos ou mais de idade, que era de 9,7% passou para 13,7%. Informações da Projeção da População por Sexo e Idade, realizada pelo IBGE, e divulgada em 2013 indicam a forte tendência de aumento da proporção de idosos na população: em 2030, seria de 18,6% e, em 2060, de 33,7%. Em 2060, a proporção da população com até 14 anos de idade seria de 13,0%; a de jovens de 15 a 29 anos de idade de 15,3% e a de pessoas de 30 a 59 anos de idade, de 38,0%<sup>2</sup> (IBGE, 2016).

Neste trabalho, objetiva-se estimar o crescimento populacional no Brasil por estado para os anos de 2016 e 2020, tendo por base resultados demográficos dos Censos referentes aos anos de 1991, 2000, 2010 e 2012; fazendo-se uso de um modelo não linear com enfoque bayesiano na análise dos dados.

## 2. Material e Métodos

### 2.1. Base de Dados

Este artigo consiste em uma investigação científica original com enfoque na pesquisa explicativa de natureza quantitativa de estudo transversal (Pereira et al., 2018). Os dados utilizados nesta pesquisa se referem às quantidades habitantes verificadas nos inquéritos censitários dos anos: 1991, 2000 e 2010, além da estimativa populacional para o ano de 2012. Os totais populacionais podem ser encontrados no sítio Sinopse do Censo Demográfico 2010<sup>1</sup>. Já a estimativa para o ano de 2012 foram obtidas do endereço Projeção da População do Brasil e das Unidades da Federação<sup>2</sup>.

A base cartográfica que serviu de base para a construção dos mapas deste trabalho foi retirada das malhas estaduais do IBGE<sup>3</sup>.

### 2.2 Modelos de Regressão não Linear

Na literatura, o crescimento populacional é ajustado na sua grande maioria por modelos não lineares. Estes por sua vez, são modelos aplicados na análise de dados quando não se é possível fazer uso dos modelos clássicos de regressão, especialmente quando algumas condições de fundamental importância não são possíveis de se observarem no processo: a normalidade e a linearidade dos parâmetros (MATTOS, 2013). Estudaram o crescimento do fruto do cafeeiro através dos modelos não lineares Gompertz e Lógico, ponderados (variâncias amostrais heterogêneas) e não ponderados. Fizeram Fernandes *et.al*

---

<sup>1</sup> Disponível em: <https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=4&uf=00>

<sup>2</sup> Disponível em:

[https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/index.html?utm\\_source=portal&utm\\_medium=popclock&utm\\_campaign=novo\\_popclock](https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/index.html?utm_source=portal&utm_medium=popclock&utm_campaign=novo_popclock)

<sup>3</sup> Disponível em: <https://mapas.ibge.gov.br/bases-e-referenciais/bases-cartograficas/malhas-digitais>

(2014), estimativas para o número de espécies biológicas denominadas macroinvertebrados bentônicos, por meio do modelo de regressão não linear, denominada Equação de Machado *et.al* (2012), avaliaram curvas de crescimento morfométrico de tilápias do Nilo em função do peso corporal, aplicando os modelos não lineares Gompertz, Brody, von Bertalanffy e logístico. Oliveira *et.al* (2000), observou o crescimento e reprodução de vacas da raça Guzerá por um período de vinte quatro anos, fazendo uso também dos modelos Gompertz, Brody, von Bertalanffy, logístico e Richards, com o intuito de estabelecer um padrão médio de crescimento para as mesmas. O modelo von Bertalanffy sobressaiu-se sobre os demais na compreensão dos dados. Freitas (2005) ajustou estas mesmas curvas de crescimento na produção animal das seguintes espécies: camarão de água doce, rã-pimenta, coelho, frango, ovino, caprino, bovino e suíno, logrando êxito em seus objetivos.

Zeviane (2009) descreve o modelo de regressão não linear como sendo aquele em que uma variável dependente Y não pode ser escrita como funções lineares de seus parâmetros. aula (2011) enfatiza a questão de que estes modelos não podem ser linearizáveis por meio de transformações, haja vista que admitem uma estrutura de erros aditivos. Khuri & Cornell (1987), ressalta-se que uma transformação poderá tornar-se insatisfatória quando altera a interpretação inerente do parâmetro e modificam a estrutura da distribuição do erro, ou seja, caso estes satisfaçam as condições necessárias de normalidade, independência e homogeneidade da variância, os erros do novo modelo nem sempre satisfazem os pressupostos necessários.

Modelos de regressão não linear também são aplicados quando alguma informação *a priori* existe sobre o fenômeno, como por exemplo, que a curva seja sempre crescente, caso típico em curvas de crescimento/acúmulo. Frequentemente, esses modelos têm parâmetros com interpretação física, química e biológica e outros parâmetros não têm, porém estão presentes para conferir flexibilidade (Zeviani, 2019).

Mazucheli *et. al* (2002) discutiu que um modelo de regressão é não linear se pelo menos um de seus parâmetros aparece de forma não linear. Observe na Tabela 1 apresenta as seguintes funções não lineares:

**Tabela 1:** Algumas equações aplicadas em modelos não lineares.

|             |                              |   |
|-------------|------------------------------|---|
| Assintótico | Michaelis-Mentem             | $\mu = \frac{\alpha x}{1 + \beta x}$                          |
|             | Exponencial com 2 parâmetros | $\mu = \alpha(1 - e^{-\gamma x})$                             |
|             | Exponencial com 3 parâmetros | $\mu = \alpha - \beta e^{-\gamma x}$                          |
| Sigmóide    | Logística com 2 parâmetros   | $\mu = \frac{e^{\alpha + \beta x}}{1 + e^{\alpha + \beta x}}$ |
|             | Logística com 3 parâmetros   | $\mu = \frac{\alpha}{1 + \beta e^{-\gamma x}}$                |
|             | Weibull                      | $\mu = \alpha - \beta e^{-\gamma x}$                          |
|             | Gompertz                     | $\mu = \alpha - \alpha e^{-\beta x}$                          |
| Arqueada    | Forma de Sino                | $\mu = \alpha e^{- \beta x ^{\beta}}$                         |
|             | Biexponencial                | $\mu = \alpha e^{-\beta x} - \dots$                           |

Fonte: Adaptada de Crawley (2012).

Conforme Carvalho (1996) as curvas de crescimento geralmente possuem a forma sigmóide com uma assíntota superior e, às vezes, apresentam também assíntota inferior. É importante salientar que normalmente para projeções de crescimento populacional é usual a aplicabilidade de modelos assintóticos, tendo em vista que sempre se espera que haja certa estabilidade da população a partir de um determinado tempo. Nas equações assintóticas apresentadas na tabela acima, quando se tem um aumento do tempo, a população tende para um valor  $\alpha$ . Zeviani *et. al* (2019) dizem que as curvas sigmóides possuem formato de “S” ao longo do tempo, já as arqueadas apresentam concavidade. A escolha do modelo deve ter como embasamento o comportamento da variável  $y$  em função do seu aumento.

### 2.3 Linearização

O ajuste de curvas de crescimento pode ser desenvolvido por meio de diversas equações, enquadradas nas seguintes categorias: lineares, intrinsecamente lineares e intrinsecamente não lineares. As primeiras são ajustadas através de regressão linear simples ou múltiplas; as segundas podem ser linearizáveis com o uso de transformações adequadas e, as terceiras são as que normalmente não devem ou não podem ser linearizadas por ajuste.

A linearização de modelos de regressão não linear é feita através de alguma transformação, este processo pode ser efetivado em modelos chamados de intrinsecamente linear; um exemplo é a equação:

$$y = a \cdot \exp(bx + \epsilon). \quad (1)$$

Nesta equação, o erro experimental ou desvio  $\exp(\epsilon)$  é multiplicativo; o que permite a aplicação de logaritmo em seu processo de linearização, tornando o problema em um simples caso de regressão linear, ou seja:  $\ln y = \ln a + bt + \epsilon$ . Por outro lado, um exemplo de equação intrinsecamente não linear é dado na equação

$$y = \alpha \cdot \exp(bx) + \epsilon. \quad (2)$$

O erro neste caso é aditivo, o que impede a aplicação de logaritmo ou qualquer tipo de transformação para se chegar a sua linearização.

A linearização facilita a obtenção das estimativas dos parâmetros, entretanto, alguns inconvenientes poderão ocorrer, como é o caso da perda de sua interpretação intrínseca e possíveis alterações na estrutura e distribuição do erro; sendo materializadas na quebra das suposições de normalidade, independência e homogeneidade da variância (Mazucheli *et. al*, 2002).

A linearização é um recurso bastante empregado nos modelos não lineares, pois além de facilitar a convergência numérica dos parâmetros e evitar problemas computacionais como o *underflow* e *overflow* e de fácil compreensão.

## 2.4 Métodos de Estimação (para modelos não lineares)

Para Muianga (2014), modelos não lineares são aqueles em que, pelo menos, uma das derivadas parciais em relação aos parâmetros do modelo são dependentes de um dos parâmetros do respectivo modelo. De acordo com Ratkowsky (1983) citado por Carvalho, (1996), as propriedades de estimação diferenciam de maneira substancial os modelos não lineares dos lineares. Os pressupostos de normalidade e independência dos erros garantidos tornam os estimadores, para o caso linear, não tendenciosos, de variância mínima e normalmente distribuída. Já para o caso de modelos não lineares, é necessária a condição de a amostra ser suficientemente grande.

conforme Björck (1996), o algoritmo de Gauss-Newton, é uma técnica usada para resolver questões de mínimos quadrados não lineares. Este método possui a grande vantagem de não se precisar fazer o cálculo das derivadas segundas; que por vezes apresentam certo grau de dificuldade em seu processo. É uma modificação do método de Newton, para se encontrar o mínimo de uma função, ou seja, apenas é utilizado para se minimizar uma soma dos valores quadrados da função, vejamos:

Sendo  $m$  funções  $r = (r_1, \dots, r_m)$  de  $n$  variáveis  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)'$ ;  $m \geq n$ , o algoritmo de Gauss-Newton iterativamente encontra o mínimo das somas dos quadrados.

$$S = (\beta) = \sum_{i=1}^m r_i^2(\beta)$$

Tendo-se uma estimativa inicial  $\beta^{(0)}$  para o mínimo, dá-se prosseguimento as iterações

$$\beta^{(s+1)} = \beta^{(s)} - (J_r' J_r)^{-1} J_r' r_i(\beta^{(s)})$$

Onde

$$J_r = \frac{\partial r_i}{\partial \beta_j}(\beta^{(s)})$$

é a Matriz Jacobiana associada aos resíduos  $r_i(\beta) = y_i - f(x_i, \beta)$  e  $J_r'$  é a Matriz Transposta de  $J_r$ .

Na montagem de dados o objetivo é encontrar os parâmetros  $\beta$  tais que uma dada função modelo  $y = f(x, \beta)$  ajuste melhor alguns pontos de dados  $(x_i, y_i)$ , as funções  $r_i$  são os resíduos  $r_i(\beta) = y_i - f(x_i, \beta)$ .

É válido frisar que a suposição  $m \geq n$  na demonstração do algoritmo é imprescindível, visto que a matriz  $J_r' J_r$  não poderá ser invertível e as equações normais não poderão ser resolvidas.

## 2.5 Inferência Bayesiana

De acordo com Mendes (2011), a inferência bayesiana pode ser aplicada em casos onde se tem experimentos pequenos, com poucas medições no tempo e que seriam inviáveis a sua análise com a estatística clássica. Os parâmetros são tratados como variáveis aleatórias dentro do modelo, existirá a necessidade de um menor número de dados; visto que os conceitos probabilísticos envolvidos reduzem a dependência do ajuste do modelo em relação a quantidade de observações utilizadas.

Nascimento (2009) traduz o desenvolvimento da Teoria Bayesiana como sendo observações  $y$ , pertencentes à certa população cujos valores são originários de distribuições probabilísticas e descritos por uma função densidade  $f(y|\theta)$ . Por sua vez,  $\theta$  corresponde a uma característica da população, que descreve o processo da distribuição da variável. A ideia

de que o pesquisador disponha de algum conhecimento prévio sobre a característica em questão  $\theta$  é de fundamental importância na Inferência Bayesiana, pois a subjetividade é à base dessa teoria; ela é aproveitada e incorporada na análise através de uma distribuição de probabilidade  $p(\theta)$  denominada de distribuição a *priori*. A função de verossimilhança é determinada por  $L(\theta) = f(y|\theta)$  e é chamada de distribuição observacional da amostra. Agregando está com a distribuição a *priori* chega-se a distribuição de  $\theta$  após observar  $y$ , que é chamada de distribuição a *posteriori*. Por conseguinte, esta distribuição é encontrada por meio do Teorema de Bayes, ou seja,

$$\pi(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)p(\theta)}{\int f(y|\theta)p(\theta)d\theta}$$

Sendo o denominador uma constante em relação a  $\theta$ . A densidade  $f(y|\theta)$  é a informação proveniente dos dados (verossimilhança),  $p(\theta)$  é chamada de probabilidade a *priori* (prévia) do evento  $\theta$ ,  $\pi(\theta|y)$  é a probabilidade a *posteriori* (posterior) do evento  $\theta$  dado o evento  $y$ .

A distribuição a *posteriori* pode ser também escrita da seguinte forma:

$$\pi(\theta|y) \propto f(y|\theta)p(\theta).$$

Arrabal (2012) ao afirmar que a Inferência Bayesiana apresenta todas as formas de incerteza em termos de probabilidade, o que não acontece na teoria clássica. Para Rossi (2011), a Inferência Bayesiana é uma metodologia estatística inovadora, que trabalha com a análise de dados tendo como embasamento a probabilidade condicional. A teoria clássica tem em sua estruturação, estimativas alicerçadas em informações presentes em amostras aleatórias. A teoria Bayesiana passa por essa perspectiva, porém uma diferença fundamental entre as duas é que na primeira o parâmetro  $\theta$  é visto como um escalar ou vetor desconhecido e fixo. Já na segunda  $\theta$  é tido como um escalar ou vetor aleatório desconhecido, e que é quantificado em termos de probabilidade e formalmente designado por distribuição a *priori*. São exatamente as informações a *priori* e amostrais que permitem a modelagem e a atualização das estimativas dos parâmetros a *posteriori* através da regra de Bayes. Dentro dessa perspectiva, o parâmetro no conceito bayesiano é considerado como sendo aleatório; podendo-se assim especificar uma distribuição de probabilidade, fazendo-se uso da

probabilidade subjetiva para o parâmetro, a qual é denominada de distribuição *a priori*, que em sua essência, reflete a crença inicial que o pesquisador tem sobre o parâmetro  $\theta$  (Devore, 2006).

## 2.6 Algoritmo

Modelos de Crescimento são amplamente utilizados em estudos que acompanham o desenvolvimento de certas populações, principalmente quando se trabalha no campo da biologia. De certo que modelos não lineares permitem fazer uma análise dos dados com maior eficiência e menores custos. Neste trabalho, a parte não linear dos dados foi observada através da equação exponencial de 3 parâmetros, apresentada na Tabela 1. As quantidades aleatórias envolvidas no modelo foram trabalhadas por meio da metodologia bayesiana, a qual permite chegar a excelentes previsões (ROSSI, 2011). Portanto, fazendo uso do software OpenBUGS trabalhou-se a seguinte estrutura na análise dos dados:

$$\left. \begin{array}{l}
 \mu_{i,j} = \alpha_i - \beta_i \cdot e^{(-\gamma_i) \cdot x_j} \\
 y_{i,j} = \log(\text{pop}_{i,j}) \\
 y_{i,j} \sim N(\mu_{i,j}; \tau) \\
 y_{\text{pred}_{i,j}} \sim N(\mu_{i,j}; \tau) \\
 \text{pop}_{\text{pred}_{i,j}} = e^{y_{\text{pred}_{i,j}}} \\
 \text{pop}_{\text{pred}_{2012}_i} = e^{y_{\text{pred}_{i,4}}} \\
 \mu_{2016}_i = \alpha_i - \beta_i \cdot e^{(-\gamma_i) \cdot x_{\text{pred}}} \\
 y_{\text{pred}_{2016}_i} \sim N(\mu_{2016}_i; \tau) \\
 \text{pop}_{\text{pred}_{2016}_i} = e^{y_{\text{pred}_{i,4}}} \\
 R_{\text{pred}_i} = \left[ \left( \frac{\text{pop}_{\text{pred}_{2016}_i}}{\text{pop}_{\text{pred}_{2012}_i}} \right)^{\frac{1}{4}} - 1 \right] \cdot 100 \\
 \alpha_i \sim G(1.2, 0.1) \\
 \beta_i \sim G(0.1, 0.1) \\
 \gamma_i \sim G(0.01, 0.1) \\
 \tau \sim G(0.01, 0.01)
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 1 \leq j \leq M \\
 i \leq N
 \end{array}$$

A primeira equação nos dá a média por estado (ou distrito federal)  $i = 1, 2, \dots, 27$  cada estado brasileiro foi codificado em conformidade com a ordem alfabética se observa Tabela 2, no tempo  $j = 1, 10, 20, 22$  (codificações para 1991, 2000, 2010 e 2012).

Por sua vez, temos na segunda equação as estimativas populacionais para as respectivas variáveis através da transformação logarítmica dos dados. Na terceira, temos assegurado que as variáveis seguem uma distribuição normal. A quarta equação dá os valores preditos de  $y$ , referente aos mesmos parâmetros. Seguidamente, temos a equação dos valores preditos para a população em qualquer estado ou tempo. Particularmente, na sexta equação encontram-se os valores estimados preditos para a população no ano 2012. A média estimada para o ano de 2016 é auferida na sétima equação, em que  $x_{pred} = 26$ . A garantia de normalidade dos valores preditos para o ano de 2016 é verificada na equação oito. O modelo  $poppred2016$ , nos dá uma estimativa da população brasileira por estado para 2016. A nona equação conduz aos valores relativos de crescimento da população entre os anos de 2012 e 2016. As demais equações exprimem os parâmetros pertencendo a uma distribuição Gama.

De acordo com Magalhães (2006), a distribuição gama possui a função densidade dada por:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} I_{(0,\infty)}(x),$$

Sendo  $\alpha$  e  $\beta$  dois parâmetros positivos e com  $\Gamma(\alpha)$  sendo a função matemática gama, definida por:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0.$$

Alguns resultados dessa função são importantes frisar:

1.  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \alpha > 0$ ;
2.  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ ,  $n$  inteiro positivo;
3.  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .
- 4.

Além disso, dependendo dos valores dos parâmetros o modelo gama recebe outros nomes, tais como:

1.  $\alpha = 1, \beta > 0$ : Exponencial;
2.  $\alpha = \frac{n}{2}, n > 0, n \in \mathbb{N}, \beta = \frac{1}{2}$ : Qui-quadrado com  $n$  graus de liberdade;
3.  $\alpha = k \in \mathbb{N}, \beta > 0$ : Erlang de ordem  $k$ .

Com a inversão da equação que segue, encontra-se a estimativa para a taxa de crescimento por estado para os anos de 2012 e 2016, ou seja:

$$pop2016 = pop2012 \left( 1 + \frac{R}{100} \right)^4$$

Observa-se que se trata de uma Progressão Geométrica. O mesmo procedimento foi utilizado para se obter projeções populacionais para o ano de 2020.

### 3. Resultados e Discussão

Ao procedermos à análise dos dados, fez-se necessário fazer a codificação dos estados, apresentada na Tabela 2 a seguir. A codificação aconteceu por ordem alfabética das siglas dos estados.

**Tabela 2:** codificação dos estados brasileiros.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|    | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| AC | AL | AM | AP | BA | CE | DF | ES | GO |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| MA | MG | MS | MT | PA | PB | PE | PI | PR |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| RJ | RN | RO | RR | RS | SC | SE | SP | TO |

Fonte: Autores.

Foram encontradas as estatísticas a posteriori dos parâmetros  $(\alpha, \beta, \gamma)$  do modelo escolhido, para cada estado e o Distrito Federal. Os resultados são expostos nas próximas Tabelas.

Na Tabela 3 abaixo são mostradas as estimativas do parâmetro beta para cada um dos estados. A estimativa do parâmetro alpha para o estado do Acre, por exemplo, vale  $\alpha = 13,58$ . Se, ao dividirmos os valores da média menos um pelos valores do erro-padrão encontrarmos um número maior ou igual a dois, em módulo, teremos uma estimativa significativa para os parâmetros. A sétima coluna da Tabela 3 traz essa informação. Verifica-

se, por exemplo, que para o estado do Acre, o valor da última coluna (13,4301) é maior que dois, em módulo. Alternativamente, pode-se examinar o intervalo de credibilidade [q2,5%; q97,5%]. Como, por exemplo, o intervalo de credibilidade da primeira linha [12,5; 15,56] não contém o valor, a estimativa é significativa.

**Tabela 3:** Estatística do parâmetro alfa para cada estado.

| Parâmetros | Média | E.P.   | q2,5%     | Mediana   | q97,5% | (Média-1)/E.P. |
|------------|-------|--------|-----------|-----------|--------|----------------|
| alpha[1]   | 13,58 | 0,9367 | 1,25E+001 | 13,28     | 15,56  | 13,4301        |
| alpha[2]   | 14,22 | 0,8055 | 1,35E+001 | 13,8      | 16,07  | 16,4122        |
| alpha[3]   | 14,83 | 0,6278 | 1,42E+001 | 14,59     | 16,5   | 22,0293        |
| alpha[4]   | 16,29 | 4,529  | 12,76     | 13,85     | 24,91  | 3,3760         |
| alpha[5]   | 15,13 | 0,6222 | 1,46E+001 | 14,81     | 16,43  | 22,7097        |
| alpha[6]   | 14,81 | 0,3274 | 1,45E+001 | 14,69     | 15,73  | 42,1808        |
| alpha[7]   | 15,39 | 0,9395 | 1,45E+001 | 14,95     | 17,73  | 15,3167        |
| alpha[8]   | 12,75 | 0,2514 | 1,25E+001 | 12,68     | 13,58  | 46,7383        |
| alpha[9]   | 14,23 | 0,4194 | 1,39E+001 | 14,07     | 15,32  | 31,5451        |
| alpha[10]  | 13,99 | 0,4197 | 1,36E+001 | 13,82     | 15,16  | 30,9507        |
| alpha[11]  | 15,03 | 0,6287 | 1,45E+001 | 14,71     | 16,45  | 22,3159        |
| alpha[12]  | 18,05 | 1,975  | 1,35E+001 | 18,59     | 20,97  | 8,6329         |
| alpha[13]  | 13,34 | 0,3742 | 1,30E+001 | 13,2      | 14,46  | 32,9770        |
| alpha[14]  | 14,75 | 0,7655 | 1,40E+001 | 14,35     | 16,4   | 17,9621        |
| alpha[15]  | 14,75 | 0,944  | 1,33E+001 | 1,54E+001 | 15,62  | 14,5657        |
| alpha[16]  | 14,44 | 0,3436 | 1,41E+001 | 14,29     | 15,2   | 39,1153        |
| alpha[17]  | 13,73 | 0,3948 | 1,34E+001 | 13,59     | 15,04  | 32,2448        |
| alpha[18]  | 14,64 | 0,5918 | 1,42E+001 | 14,36     | 16,17  | 23,0483        |
| alpha[19]  | 16,16 | 0,6956 | 1,55E+001 | 15,76     | 17,61  | 21,7941        |
| alpha[20]  | 13,62 | 0,1831 | 1,34E+001 | 13,57     | 14,14  | 68,9241        |

|           |       |        |           |           |       |          |
|-----------|-------|--------|-----------|-----------|-------|----------|
| alpha[21] | 13,28 | 0,7306 | 1,27E+001 | 12,98     | 15,51 | 16,8081  |
| alpha[22] | 13,24 | 0,9058 | 1,22E+001 | 12,98     | 15,66 | 13,5129  |
| alpha[23] | 14,21 | 0,1106 | 1,40E+001 | 1,42E+001 | 14,46 | 119,4394 |
| alpha[24] | 20,69 | 2,797  | 1,58E+001 | 20,44     | 25,39 | 7,0397   |
| alpha[25] | 13,3  | 0,2787 | 1,30E+001 | 13,21     | 14,12 | 44,1335  |
| alpha[26] | 16,33 | 0,2898 | 1,61E+001 | 16,24     | 17,26 | 52,8986  |
| alpha[27] | 12,9  | 0,5132 | 12,3E+001 | 12,77     | 14,36 | 23,1878  |

Fonte: Autores.

Vale ressaltar que na terceira coluna das tabelas (E.P) corresponde ao erro padrão e que o fato de aparecer valores negativos para os parâmetros não gera distorção nos resultados, o importante é que os valores da última coluna sejam maiores que 2 ou menores do que -2, o que indica que as estimativas são diferentes de 1 para mais ou para menos.

Observa-se na Tabela 4, a seguir, são exibidas as estimativas do parâmetro beta para cada uma das unidades federativas. A estimativa do parâmetro beta para o estado do Acre, por exemplo, é  $\beta = 1,513$ . Porém esta estimativa não é significativa, pois seu intervalo de credibilidade contém o valor um. Alternativamente, o valor da coluna (Média-1)/E.P. está entre -2 e 2, logo a estimativa não difere de um.

**Tabela 4:** Estatísticas do parâmetro beta para cada estado.

| Parâmetros | Média  | E.P.  | q2,5%     | Mediana | q97,5% | (Média-1)/E.P. |
|------------|--------|-------|-----------|---------|--------|----------------|
| beta[1]    | 1,513  | 1,411 | 8,84E-005 | 1,238   | 3,584  | 0,3636         |
| beta[2]    | 0,9466 | 1,388 | 4,24E-005 | 0,5294  | 2,885  | -0,0385        |
| beta[3]    | 1,202  | 1,351 | 0,001971  | 0,9427  | 3,261  | 0,1495         |
| beta[4]    | 4,334  | 4,535 | 0,6492    | 1,886   | 12,85  | 0,7352         |
| beta[5]    | 0,5315 | 1,088 | 5,91E-008 | 0,1011  | 1,833  | -0,4306        |
| beta[6]    | 0,5007 | 1,278 | 3,76E-006 | 0,1785  | 2,529  | -0,3907        |
| beta[7]    | 1,158  | 1,332 | 5,77E-007 | 0,757   | 3,697  | 0,1186         |

|          |        |        |           |         |        |         |
|----------|--------|--------|-----------|---------|--------|---------|
| beta[8]  | 0,3151 | 0,9948 | 1,77E-006 | 0,0416  | 1,721  | -0,6885 |
| beta[9]  | 0,5138 | 1,106  | 1,49E-006 | 0,2007  | 2,356  | -0,4396 |
| beta[10] | 0,6002 | 1,238  | 5,30E-006 | 0,2748  | 2,567  | -0,3229 |
| beta[11] | 0,55   | 0,974  | 1,02E-006 | 0,1106  | 1,929  | -0,4620 |
| beta[12] | 4,769  | 1,947  | 0,09223   | 5,305   | 7,555  | 1,9358  |
| beta[13] | 0,4851 | 1,099  | 1,02E-006 | 0,1429  | 2,262  | -0,4685 |
| beta[14] | 0,7638 | 1,272  | 1,29E-005 | 0,4568  | 2,385  | -0,1857 |
| beta[15] | 1,499  | 1,097  | 2,32E-004 | 2,097   | 2,097  | 0,4549  |
| beta[16] | 0,3802 | 1,037  | 1,29E-005 | 0,1601  | 1,385  | -0,5977 |
| beta[17] | 0,4912 | 1,217  | 3,55E-005 | 0,1239  | 2,337  | -0,4181 |
| beta[18] | 0,519  | 1,188  | 1,06E-005 | 0,04932 | 2,299  | -0,4049 |
| beta[19] | 0,6518 | 0,889  | 1,13E-005 | 0,2824  | 1,99   | -0,3917 |
| beta[20] | 0,3231 | 1,043  | 1,30E-005 | 0,06821 | 1,936  | -0,6490 |
| beta[21] | 0,8108 | 1,862  | 2,07E-006 | 0,4158  | 3,051  | -0,1016 |
| beta[22] | 1,382  | 1,262  | 0,001006  | 1,243   | 3,956  | 0,3027  |
| beta[23] | 0,0905 | 0,1033 | 1,54E-005 | 0,09164 | 0,3818 | -8,8047 |
| beta[24] | 8,174  | 2,809  | 3,341     | 7,852   | 12,76  | 2,5539  |
| beta[25] | 0,4195 | 1,087  | 7,41E-005 | 0,07218 | 1,933  | -0,5340 |
| beta[26] | 0,3048 | 0,9928 | 1,62E-007 | 0,03983 | 1,483  | -0,7002 |
| beta[27] | 3,115  | 0,5154 | 2,474     | 3,024   | 4,407  | 4,1036  |

Fonte: Autores.

A Tabela 5 traz as estimativas do parâmetro beta para os estados da federação. A estimativa do parâmetro gama para o estado do Acre, por exemplo, é  $\gamma = 0,2445$ . O valor da coluna (Média-1)/E.P. está entre -2 e 2, logo a estimativa não difere de um. Alternativamente, seu intervalo de credibilidade contém o valor um, chegando a mesma conclusão.

**Tabela 5:** Estatísticas do parâmetro gama para cada estado.

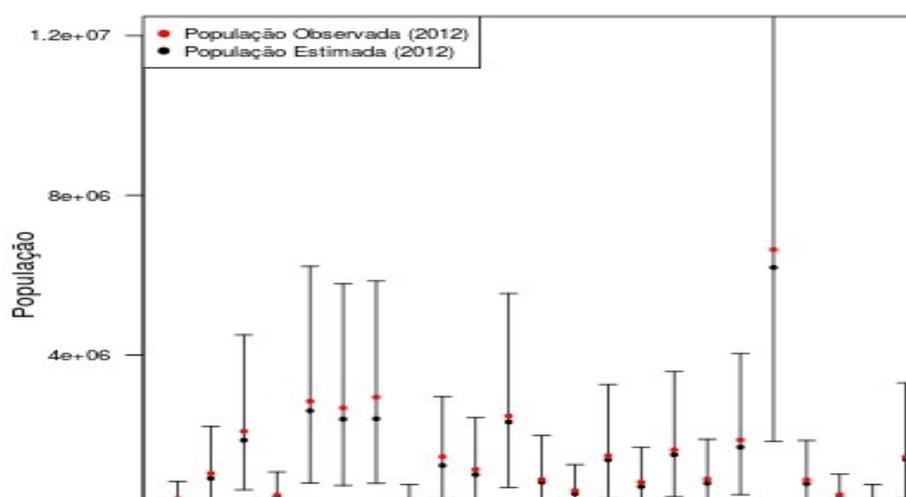
| Parâmetros | Média    | E.P.     | q2,5%     | Mediana  | q97,5%   | (Média - 1)/E.P. |
|------------|----------|----------|-----------|----------|----------|------------------|
| gama[1]    | 0,2445   | 0,9822   | 3,86E-004 | 0,02762  | 2,093    | -0,7692          |
| gama[2]    | 0,526    | 1,794    | 2,08E-005 | 0,02292  | 4,468    | -0,2642          |
| gama[3]    | 0,363    | 1,867    | 2,96E-006 | 0,05787  | 2,411    | -0,3412          |
| gama[4]    | 0,1047   | 0,3075   | 0,002425  | 0,03246  | 0,9199   | -2,9115          |
| gama[5]    | 0,5549   | 2,013    | 3,48E-006 | 0,01166  | 5,477    | -0,2211          |
| gama[6]    | 0,9617   | 2,589    | 8,56E-005 | 0,06684  | 7,495    | -0,0148          |
| gama[7]    | 0,3438   | 1,059    | 1,62E-006 | 0,02807  | 2,82     | -0,6196          |
| gama[8]    | 0,9443   | 2,757    | 8,35E-006 | 0,0331   | 7,97     | -0,0202          |
| gama[9]    | 0,6332   | 2,146    | 2,90E-006 | 0,02612  | 5,307    | -0,1709          |
| gama[10]   | 0,887    | 2,924    | 9,40E-005 | 0,05871  | 7,976    | -0,0386          |
| gama[11]   | 1,254    | 3,422    | 5,46E-006 | 0,03276  | 10,44    | 0,0742           |
| gama[12]   | 0,0577   | 0,4071   | 2,92E-007 | 0,001933 | 0,5699   | -2,3147          |
| gama[13]   | 0,9426   | 2,6      | 7,91E-005 | 0,0863   | 8,475    | -0,0221          |
| gama[14]   | 0,773    | 2,914    | 8,19E-006 | 0,002848 | 7,708    | -0,0779          |
| gama[15]   | 0,2302   | 1,293    | 2,48E-007 | 2,48E007 | 2,391    | -0,5954          |
| gama[16]   | 0,8028   | 2,859    | 5,14E-006 | 0,002139 | 6,868    | -0,0690          |
| gama[17]   | 0,9986   | 3,216    | 5,71E-005 | 0,02964  | 8,411    | -0,0004          |
| gama[18]   | 0,5964   | 2,177    | 6,92E-006 | 0,01603  | 5,388    | -0,1854          |
| gama[19]   | 0,9274   | 2,952    | 5,14E-006 | 0,002388 | 10,16    | -0,0246          |
| gama[20]   | 0,9004   | 2,75     | 6,67E-006 | 0,03996  | 8,405    | -0,0362          |
| gama[21]   | 0,8455   | 2,31     | 6,88E-005 | 0,04347  | 4,938    | -0,0669          |
| gama[22]   | 0,1062   | 0,4327   | 7,88E-006 | 0,02809  | 0,8579   | -2,0656          |
| gama[23]   | 0,07698  | 0,6411   | 2,67E-008 | 2,67E008 | 0,6247   | -1,4397          |
| gama[24]   | 0,003215 | 0,002706 | 2,10E-006 | 0,002841 | 0,009232 | -368,36          |

|          |        |         |           |         |        |          |
|----------|--------|---------|-----------|---------|--------|----------|
| gama[25] | 0,6705 | 2,313   | 4,94E-005 | 0,02457 | 6,397  | -0,1425  |
| gama[26] | 1,247  | 2,907   | 1,17E-005 | 0,05694 | 8,964  | 0,0850   |
| gama[27] | 0,1208 | 0,07771 | 0,04137   | 0,1107  | 0,2421 | -11,3138 |

Fonte: Autores.

A Figura 1 consiste numa técnica visual de validação do modelo empregado. Nela estão representados os tamanhos populacionais do ano de 2012 observados para cada estado, bem como os valores preditos pelo modelo com barras de erros com 95% de credibilidade.

**Figura 1:** populações do ano de 2012 observados para cada estado e valores preditos 95% de confiança.

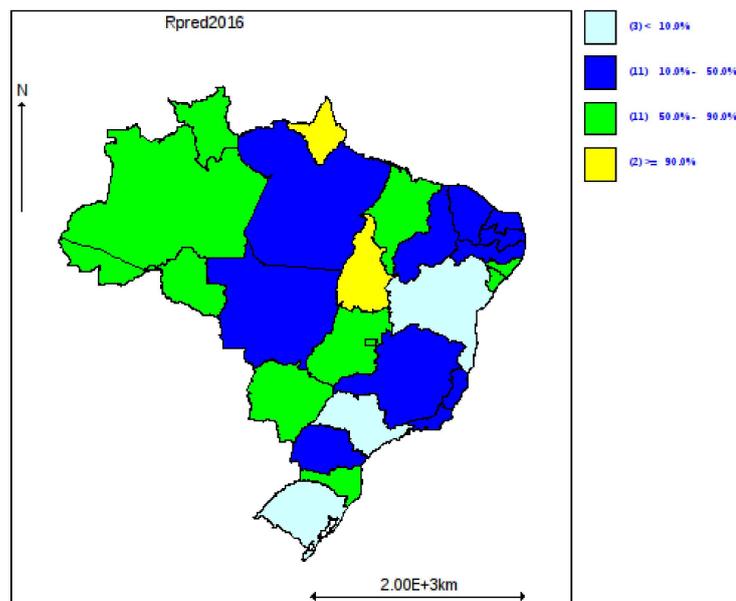


Fonte: Autores.

Observa-se que todos os valores observados no gráfico estão próximos aos valores previstos e dentro das barras de erros. O mesmo acontece para os outros anos observados, indicando assim um bom ajuste do modelo aos dados.

A análise dos dados através do software citado proporcionou a obtenção de mapas do Brasil, nos quais os estados estão coloridos em conformidade com o número de habitantes estimados para eles. A Figura 2 representa um destes mapas, em que são apresentadas estimativas populacionais (em percentuais) para o ano de 2016. Observa-se a ocorrência de taxas populacionais menores nas regiões que compreendem o litoral, enquanto os estados que estão dispostos geograficamente no interior do país possuem taxas maiores de crescimento.

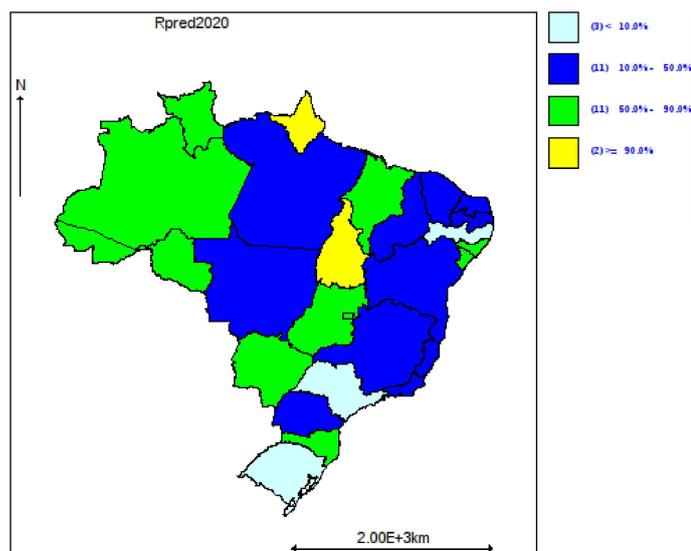
**Figura 2:** Taxas de crescimento previstas para 2016 para cada estado.



Fonte: Autores.

A Figura 3, também é composta por estimativas populacionais para os estados e Distrito Federal, todavia referente ao ano de 2020. O comportamento dos dados revela projeções com a mesma perspectiva, onde áreas litorâneas aparecem com taxas menores das demais, denotando assim um aumento em suas populações.

**Figura 3:** Taxas de crescimento previstas para 2020 para cada estado.

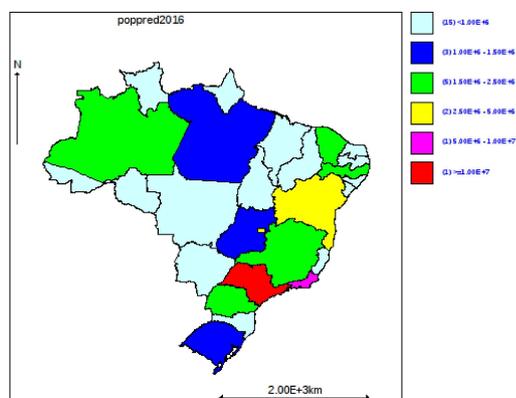


Fonte: Autores.

Verifica-se também que está acontecendo uma transferência de pessoas de áreas mais densamente povoadas para áreas menos povoadas. A análise gráfica corrobora os índices estatísticos disseminados pelo Instituto de Geografia e Estatística em 2010, conforme citado anteriormente, os quais indicavam crescimento populacional para região Norte de 2,09% e Centro-Oeste com 1,91%. Outros estudos como o de Noronha *et.al* (2013), ressaltam também as regiões Sudeste, Nordeste e Sul como sendo as mais populosas e que as regiões menos populosas, Norte e Centro-Oeste, continuam crescendo a um ritmo mais veloz que as demais no período compreendido entre 2000 e 2010. Na Figura 2, por exemplo, aparecem taxas bastante significativas para os estados de Tocantins e Amapá (cor amarela) que aparecem com valores a partir de 90%. Roraima, Amazonas, Acre, Rondônia, Mato grosso, Mato Grosso do Sul, Goiás, seguidos pelos estados do nordeste Alagoas e Sergipe, bem como pelo estado do sul (Santa Catarina) possuem taxas consideradas positivas ao crescimento populacional que giram entre 50% e 90%. O destaque em nossas previsões se dá para os dois estados nordestinos, já que o IBGE indicava uma queda para a região nordeste. Os estados com menor taxa de crescimento são Rio Grande do Sul, São Paulo e Bahia (taxas menores que 10%). As estimativas presentes na Figura 2 referentes a 2020, também remetem aos mesmos percentuais para os estados de Tocantins e Amapá (maior que 90%). Todavia Pernambuco passa a apresentar um percentual diferente de crescimento que chega a ser menor do que 10%. Bahia por sua vez, aparece com acréscimo percentual maior, variando entre 10% e 50%.

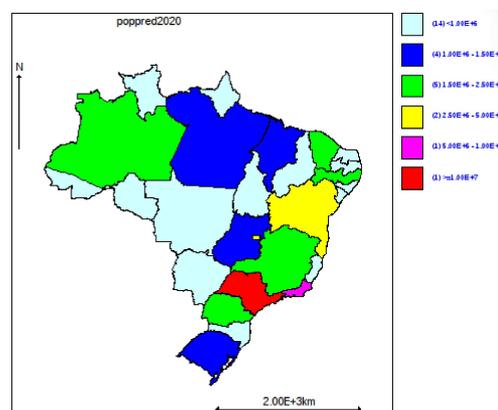
As Figuras 4 e 5 correspondem às populações preditas para os estados e Distrito Federal. Elas evidenciam que das populações preditas para 2016 e 2020, somente o Estado do Maranhão tende mudar de categoria.

**Figura 4:** população predita para o ano de 2016 para cada estado.



Fonte: Autores.

**Figura 5:** população predita para o ano de 2020 para cada estado.

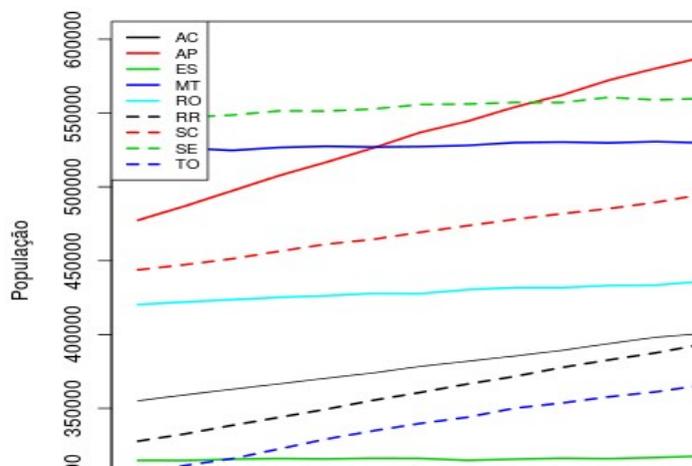


Fonte: Autores.

Em ambas as figuras, o Estado de São Paulo aparece com uma população acrescida de dez milhões de pessoas. Em seguida, vem o estado do Rio de Janeiro apresentando um aumento entre cinco e dez milhões de pessoas. Bahia e Distrito Federal também se destacam nesta linha de raciocínio, com suas populações variando entre dois milhões e meio e cinco milhões.

A Figura 6 traz um gráfico onde estão dispostas as populações previstas entre os anos de 2016 e 2030 para os nove menores estados (em número de habitantes) do país. Observe que alguns estados como Amapá, Roraima, Tocantins e Santa Catarina tenderão a continuar crescendo bastante nos próximos 15 anos, enquanto estados como Mato Grosso, Espírito Santo e Rondônia parecem ter atingido um limiar de crescimento. Portanto, espera-se que as populações destes últimos estados não sofram grandes alterações nos próximos anos.

**Figura 6:** populações previstas de 2016- 2030 para os nove menores estados em número de habitantes.



Fonte: Autores.

De modo geral, estas projeções são convergentes com as estimativas feitas pelo Instituto de Geografia e Estatística (IBGE), principalmente as relacionadas aos estados do nordeste.

#### 4. Considerações Finais

Observou-se a existência de uma dinâmica demográfica expressiva que abrange os continentes de maneira peculiar, onde taxas de crescimento populacionais em sua maioria se apresentam decrescentes; apesar de se verificar aumentos contínuos no contingente populacional mundial, existem projeções para uma estabilização da mesma, e finalmente, o seu desaceleramento a partir de 2100.

Verifica-se ainda o desempenho estimado para a África em termos de esta promover o maior aumento a população global em relação aos demais continentes, como também, do baixo desempenho populacional da Europa. O envelhecimento da população mundial é outro aspecto bastante interessante no processo. Dados demográficos pertinentes ao Brasil também acompanham este ritmo: acréscimos populacionais constantes com desaceleração em suas taxas de natalidade e envelhecimento de sua população.

Em relação à aplicação do modelo bayesiano, verifica-se nos resultados alcançados que o mesmo cumpre de maneira promissora o seu objetivo principal, que é o de estimar bem as taxas de crescimento populacionais dos estados brasileiros. Os dados trabalhados espelham o crescimento da população brasileira, porém, com escala menor em estados constituídos tanto por maior desenvolvimento como por um contingente populacional abundante. Contrariamente, os estados com menor desempenho nestas duas variantes, pontuaram projeções populacionais maiores. Os percentuais do modelo, auferidos para os estados brasileiros refletem os valores dos resultados disseminados pelo IBGE relativo ao censo demográfico 2010, expostos inicialmente.

#### Referências

Alves, J. E. D. (2014). População, desenvolvimento e sustentabilidade: perspectivas para a CIPD pós-2014. *Revista Brasileira de Estudos de População*, 31(1), 219-230.

Arrabal, C. T. (2012). Estimación clásica e bayesiana para relação espécie-área com distribuições truncadas no zero.

Ávila, R. I., & Machado, A. M. (2015). Transição demográfica brasileira: desafios e oportunidades na educação, no mercado de trabalho e na produtividade. *Textos Para Discussão*, (133).

Bongaarts, J. (2009, May). Population growth and policy options in Sub-Saharan Africa. In a special session organized by the Hewlett Foundation, PAA meetings, Detroit.

Calbo, A. G., Silva, W. L. C., & Torres, A. C. (1987). Ajuste de funções não lineares de crescimento. *Revista Brasileira de*

Carvalho, L. R. D. (1996). Métodos para comparação de curvas de crescimento.

Castiglioni, A., Giuberti, A., & Moyses, A. (2014). Análise do Desenvolvimento Econômico e Social do Espírito Santo à Luz da Transição Demográfica.

Crawley, M. J. (2012). *The R book*. John Wiley & Sons.

Devore, J. L. (2006). *Probabilidade e Estatística: para Engenharia e Ciências*. (Tradução Joaquim Pinheiro Nunes da Silva). São Paulo: Pioneira Thomson. Learning.

Fernandes, T. J., Pereira, A. A., Muniz, J. A., & Savian, T. V. (2014). Seleção de modelos não lineares para a descrição das curvas de crescimento do fruto do cafeeiro.

Freitas, A. R. (2005). Curvas de crescimento na produção animal. *R. Bras. Zootec*, v. 34, n. 3, p. 786-795. <http://www.scielo.br/pdf/rbz/v34n3/a10v34n3>. Acesso em: 13 de abril de 2016.

He, W., Goodkind, D., & Kowal, P. (2016). US Census Bureau, International population reports, P95/16-1, an aging world: 2015.

Instituto Brasileiro De Geografia E Estatística (2014). Estimativas da população dos municípios brasileiros com data de referência em 1º de julho de 2014. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Coordenação de População, & Indicadores Sociais. (2008). Síntese de indicadores sociais: uma análise das condições de vida da população brasileira, 2008 (No. 23). Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

José, E., Muniz, J. A., Sáfadi, T., & Savian, T. V. (2012). Estimação de um modelo de espécies de macroinvertebrados bentônicos via análise bayesiana do modelo de michaelis-menten. *Rev. Bras. Biom*, 30(1), 106-123.

Küchemann, B. A. (2012). Envelhecimento populacional, cuidado e cidadania: velhos dilemas e novos desafios. *Sociedade e Estado*, 27(1), 165-180.

Lutz, W., & KC, S. (2010). Dimensions of global population projections: what do we know about future population trends and structures?. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 365(1554), 2779-2791.

Mattos, T. (2013). Modelos Não Lineares e suas Aplicações. Trabalho de conclusão de curso de bacharelado em Estatística. Universidade Federal de Juiz de Fora.

Mazucheli, J., & Achcar, J. A. (2002). Algumas considerações em regressão não linear. *Acta Scientiarum. Technology*, 24, 1761-1770.

Melrose, J., Perroy, R., & Careas, S. (2015). World population prospects. United Nations, 1(6042), 587-92.

Mendes, P. N. (2011). Ajuste dos modelos Gompertz e Logístico na descrição das curvas de crescimento de tomates: uma abordagem Bayesiana (Doctoral dissertation, Tese (Doutorado). Lavras, UFLA).

Muianga, C. A., Muniz, J. A., Nascimento, M. D. S., Fernandes, T. J., & Savian, T. V. (2016). Descrição da curva de crescimento de frutos do cajueiro por modelos não lineares. *Revista Brasileira de Fruticultura*, 38(1), 22-32.

Nascimento, F. F. (2009). Abordagem Bayesiana Não-paramétrica para Análise de Valores Extremos (Doctoral dissertation, Ph. D. Thesis. Universidade Federal do Rio de Janeiro).

Oliveira, T., & Oneill, M. M. V. C. (2013). Cenário sociodemográfico em 2022/2030 e distribuição territorial da população: uso e ocupação do solo. Fundação Oswaldo Cruz, et al. *A saúde no Brasil em, 2030*.

Oliveira, H. N. D., Lôbo, R. B., & Pereira, C. S. (2000). Comparação de modelos não-lineares para descrever o crescimento de fêmeas da raça Guzerá. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, 35(9), 1843-1851.

Paula, F. V. D. (2011). Métodos estatísticos aplicados à análise de dados de etiqueta de sequência expressa.

Pereira, A. S., Shitsuka, D. M., Parreira, F. J., & Shitsuka, R. (2018). *Metodologia da pesquisa científica.[e-book]*. Santa Maria. Ed. UAB/NTE/UFSM. Disponível em: [https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/15824/Lic\\_Computacao\\_Metodologia-Pesquisa-Cientifica.pdf](https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/15824/Lic_Computacao_Metodologia-Pesquisa-Cientifica.pdf).

Plentz, R. D. (2003). Redes bayesianas para análise de comportamento aplicadas a telefonia celular.

Rossi, R. M. (2011). Introdução aos métodos Bayesianos na análise de dados zootécnicos com uso do WinBUGS e R. Eduem: Maringá.

Sallum Neto, F., Carvalho, L. R. D., & Mischan, M. M. (2013). Ajustes de modelos não lineares a dados de crescimento com estrutura de erros independentes e autoregressivos de primeira ordem-aplicações. *Revista Brasileira de Biometria*, 631-644.

Santos, V. B. D., Freitas, R. T. F. D., Silva, F. F., & Freato, T. A. (2007). Avaliação de curvas de crescimento morfométrico de linhagens de tilápia do Nilo (*Oreochromis niloticus*). *Ciência e Agrotecnologia*, 31(5), 1486-1492.

Souza, L. G. (2012). Preparação da Base Espacial do Censo Demográfico IBGE 2010 para o município do Rio de Janeiro. Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação. Recife.

#### **Porcentagem de contribuição de cada autor no manuscrito**

Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros – 35%

Mácio Augusto de Albuquerque – 35%

Maria da Conceição Lacerda Fernandes – 30%