

Rotação por estações: experimentação de uma proposta didática a alunos do ensino médio, no estudo de progressões por meio dos fractais

Station rotation: experimenting a teaching proposal to high school students, in the study of progressions through fractals

Rotación por estaciones: relato de experiencia de una propuesta didáctica de progresiones, para alumnos de educación secundaria, por intermedio de fractales

Recebido: 25/09/2020 | Revisado: 27/09/2020 | Aceito: 30/09/2020 | Publicado: 02/10/2020

Pâmella de Alvarenga Souza

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5555-0008>

Universidade Estadual Norte Fluminense, Brasil

E-mail: pamella@pq.uenf.br

Oscar Alfredo Paz La Torre

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0243-9554>

Universidade Estadual Norte Fluminense, Brasil

E-mail: oscar@uenf.br

Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5088-6511>

Instituto Federal Fluminense, Brasil

E-mail: gilmarab@iff.edu.br

Resumo

O Ensino Híbrido surge como a junção de duas modalidades de ensino, o presencial, em sala de aula tradicional, e o *on-line*, utilizando tecnologias digitais. Este propõe atividades individuais e atividades em grupo, promovendo as trocas sociais entre os alunos, para o desenvolvimento de uma aprendizagem mais significativa. Diante disso, elaborou-se uma proposta didática, utilizando Rotação por Estações, por meio de atividades investigativas. Essa proposta didática tem por objetivo relacionar os Fractais com o estudo de Progressões com o auxílio do Ensino Híbrido por meio da Rotação por Estações. Em cada estação, utilizou-se a metodologia de ensino, Investigação Matemática, com apoio de diversos recursos, a saber: *software* GeoGebra no computador e no *smartphone*; material concreto; colagem de papel colorido; e régua com instrumento geométrico. Este trabalho tem por objetivo relatar a experimentação dessa proposta didática com os alunos da segunda série do Ensino Médio, de

uma escola privada. Coletaram-se os dados da observação e respostas das atividades. Estes foram analisados com base no referencial teórico do Ensino Híbrido. Por meio da análise dos dados, foi identificado que a proposta despertou o entusiasmo e a curiosidade dos alunos, que apresentaram mais autonomia, tornaram-se ativos na construção do seu próprio conhecimento.

Palavras-chave: Ensino híbrido; Investigação matemática; Fractais.

Abstract

Blended Learning emerges as the combination of two teaching modalities, classroom, in a traditional classroom, and online, using digital technologies. This proposes individual and group activities, promoting social exchanges between students, for the development of more meaningful learning. Therefore, a didactic proposal was elaborated, using Rotation by Stations, through investigative activities. This didactic proposal aims to relate Fractals with the study of Progressions with the help of Hybrid Teaching through Rotation by Seasons. In each station, the teaching methodology, Mathematical Research, was used, with the support of several resources, namely: GeoGebra software on the computer and smartphone; concrete material; collage of colored paper; and ruler with geometric instrument. This work aims to report the experimentation of this didactic proposal with the students of the second grade of High School, from a private school. Observation data and activity responses were collected. These were analyzed based on the theory of Hybrid Teaching. Through data analysis, it was identified that the proposal aroused the enthusiasm and curiosity of the students, who had more autonomy, became active in the construction of their own knowledge.

Keywords: Blended learning; Mathematical investigation; Fractals.

Resumen

La enseñanza híbrida surge como la combinación de dos modalidades de enseñanza, presencial, en un aula tradicional y en línea, utilizando tecnologías digitales. Esta Enseñanza propone actividades individuales y grupales, promoviendo intercambios sociales entre estudiantes, para el desarrollo de aprendizajes más significativos. Para ello, se elaboró una propuesta didáctica, utilizando Rotación por Estaciones, a través de actividades de investigación. Esta propuesta didáctica pretende relacionar los fractales con el estudio de las progresiones con la ayuda de la enseñanza híbrida a través de la rotación por estaciones. En cada estación se utilizó la metodología de Investigación Matemática, con el apoyo de varios recursos, a saber: software GeoGebra en computadora y móvil; material tangible; plegado de papel de colores; y regla con instrumento geométrico. Este trabajo tiene como objetivo relatar la experiencia de esta

propuesta didáctica con los alumnos de educación secundaria, de un colegio particular. Se recopilaron datos de observación y respuestas de actividad. Estos fueron analizados con base en la teoría de la enseñanza híbrida. Por intermedio del análisis de datos, se identificó que la propuesta despertó el entusiasmo y la curiosidad de los estudiantes, quienes al tener más autonomía, se volvieron activos en la construcción de su propio conocimiento.

Palabras clave: Ensino Híbrido; Investigación Matemática; Fractales.

1. Introdução

Segundo Bermejo, Moraes e Graça (2010) o conteúdo de Progressões é um conteúdo que geralmente é visto de forma mecanizada, com resolução de exercícios propostos pelo livro didático adotado. Estes enfatizam que essa forma se revela no fato de que muitos professores não conhecem recursos que podem facilitar no estudo deste tema de forma diversificada. Deste modo, acabam preterindo um tratamento que possa integrar a Álgebra com a Geometria.

Uma das formas de promover essa integração é a exploração de padrões, visto que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental [Brasil] (1998) sugere essa exploração, até mesmo de generalizações, desde quando é introduzida a Álgebra. Nos PCN do Ensino Médio [Brasil] (2000), as generalizações de padrões estão vinculadas a elaboração de conjecturas, estimulação de regularidades e capacidade de argumentação.

Lorenzato (2010) destaca que a integração da Álgebra com a Geometria é um ponto de conexão entre campos matemáticos e que promove o ensino interdisciplinar. Além disso, ressalta que a Geometria é um facilitador na aprendizagem da Matemática, visto que torna visível o que os símbolos nem sempre conseguem se expressar.

Leivas e Cury (2008) complementam destacando a ligação da Álgebra com a Geometria Fractal¹, em que ocorre um processo iterativo, quando se cria um algoritmo ao ser executado, surgindo uma estrutura similar.

O estudo de Fractais no Ensino Médio possibilita a abordagem de alguns conteúdos matemáticos por meio das iterações, como: áreas, perímetros, sequências, potenciação, função exponencial, entre outros (Sallum, 2005). Nesse contexto, elaborou-se uma proposta didática sobre os Fractais, a qual possibilita estabelecer conjecturas sobre conteúdo de progressões.

¹ Esta Geometria refere-se ao estudo dos Fractais (Barbosa, 2005).

Para a experimentação da proposta, utilizou-se o Ensino Híbrido, pois é uma modalidade de ensino instigadora, a qual os alunos são ativos na construção de seus conhecimentos (Rodrigues Júnior & Castilho, 2016). Além disso, os estudantes e os professores aprendem e ensinam em tempos variados (Bacich, 2016).

Para Christensen, Horn e Staker (2013) o Ensino Híbrido pode ser vivenciado em quatro formas: Rotação; Flex; À La Carte; e Virtual Aprimorado. Para a proposta didática adotou-se a Rotação, para que os alunos revezem atividades conforme a orientação da professora. Segundo os autores citados a Rotação pode ser de quatro tipos: Rotação por Estações, Laboratório Rotacional, Sala de Aula Invertida e Rotação Individual. Na pesquisa descrita optou-se por Rotação por Estações pelo fato de propiciar a participação ativa dos estudantes, a promoção da autonomia e as relações horizontais entre o professor e o estudante.

Na Rotação por Estações os alunos realizam diferentes atividades em estações, geralmente, no ambiente da sala de aula. Ao abordar um conteúdo com dispositivos diferentes, uma das atividades precisa ser *on-line* (Christensen *et al.*, 2013). Além disso, é possível personalizar o ensino (Bacich, 2016), com atividades investigativas, que tem o intuito de conduzir o aluno a explorar questões, a conjecturar, a realizar testes, a reformular, e a justificar (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2016).

Diante do exposto, formulou-se a seguinte questão de pesquisa: Como o estudo de Fractais pode influenciar no processo de ensino e aprendizagem de Progressões na modalidade híbrida, por meio da Rotação por Estações, com os alunos do Ensino Médio? Com o intuito de responder esta questão, caracterizou-se o seguinte objetivo: relacionar os Fractais com o estudo de Progressões por meio do Ensino Híbrido, Rotação por Estações.

Uma pesquisa análoga foi realizada com Licenciandos em Matemática (Souza, Torre & Barcelos, 2019). Neste trabalho, o relato da proposta didática teve caráter exploratório, analisando a aplicabilidade com base a personalização do Ensino Híbrido.

Este artigo tem por objetivo relatar a experimentação dessa proposta didática sobre Progressões com o auxílio dos Fractais, para os alunos da segunda série do Ensino Médio, utilizando Rotação por Estações.

Este trabalho encontra-se organizado em quatro seções, além da Introdução. Na seção 2, aborda-se brevemente, o Ensino Híbrido e Investigação Matemática, metodologia de ensino desta pesquisa. Na seção 3, apresenta as etapas da proposta didática, com seus respectivos objetivos. Na seção 4, descrevem-se os resultados da experimentação com os alunos do Ensino Médio e analisam-se os dados obtidos. Na última seção, são apresentadas algumas considerações sobre o tema abordado.

2. Ensino Híbrido e Investigação Matemática

O Ensino Híbrido, de forma geral, é a junção de duas modalidades de ensino o presencial, que ocorre na sala de aula tradicional e o *on-line*, que utiliza tecnologias digitais que estimulam o ensino. Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015, p.13) definem ser “[...] uma abordagem pedagógica que combina atividades presenciais e atividades realizadas por meio de tecnologias digitais de informação e comunicação”. Para Bacich e Moran (2018) trabalhar com o Ensino Híbrido é utilizar metodologias ativas, porque promove maior adesão ao processo de ensino e aprendizagem e exige uma nova postura dos professores e dos alunos. Dado que “[...] são estratégias de ensino centrada na participação efetiva dos estudantes na construção do processo de aprendizagem” (Bacich & Moran, 2018, p.4).

Complementando, Bacich *et al.* (2015) afirmam que a responsabilidade da aprendizagem é do estudante, pois assume uma postura mais participativa, resolvendo problemas, desenvolvendo projetos e, dessa forma produz oportunidades para a construção do seu conhecimento. Para o professor, seu papel é de mediador e consultor da aprendizagem.

Já a sala de aula torna-se o local, onde o estudante tem a presença do professor e dos colegas que o auxiliam na resolução de suas tarefas e na significação da informação, a qual ele pode desenvolver as competências necessárias para a construção do conhecimento. Além disso, a sala de aula passa a ser um local de aprendizagem ativa (Bacich *et al.*, 2015).

Rodrigues Júnior e Castilho (2016) corroboram e destacam que o Ensino Híbrido é instigador, pois os alunos são desafiados e motivados. Além de estimular a participação ativa em sua construção do conhecimento. O professor se torna um condutor, orientador e facilitador, passando a ter mais tempo para analisar e observar o desenvolvimento de cada aluno (Rodrigues Júnior & Castilho, 2016).

O Ensino Híbrido pode ser vivenciado de diversas formas. Nesta pesquisa, optou-se por experimentar a Rotação por Estações. Nessa sub-categoria adotada, Bacich *et al.* (2015) relatam que os estudantes são organizados em grupos e que realizam simultaneamente tarefas diferentes, segundo os objetivos e o planejamento do professor. Podem ocorrer dentro da sala de aula ou em um conjunto de salas de aula. Ressalta-se que os estudantes podem trabalhar de forma conjunta e individualmente, passando pelas estações, cumprindo as tarefas orientadas pelo professor. É necessário que pelo menos uma das estações apresente atividades *on-line*. A variedade dos recursos utilizados nas estações favorece a personalização do ensino. Destaca que as atividades não são sequenciais e são independentes, funcionando de forma integrada (Christensen *et al.*, 2013).

Horn e Staker (2015) afirmam que a Rotação é a mais atraente para os professores. Trevisani (2018) destaca que cada estação deve ter objetivos específicos em benefício do geral da aula. Utilizam-se recursos diversos, ficando a critério do professor a determinação do tempo para a rotação e o número de estações.

As atividades das estações podem ser elaboradas com base na metodologia de ensino, Investigação Matemática. Esta possibilita trabalhar de forma atraente, lúdica e produtiva. Promove o envolvimento ativo dos alunos, favorecendo o desafio e a descoberta (Ponte *et al.*, 2016). Além disso, auxilia na aprendizagem de conceitos matemáticos permitindo o desenvolvimento de habilidades cognitivas (Luiz & Col, 2013).

A Investigação Matemática é praticada em quatro momentos principais: (i) exploração e formulação de questões; (ii) conjecturas; (iii) teste e reformulação e (iv) justificação e avaliação (Ponte *et al.*, 2016). O Quadro 1 apresenta uma síntese dos momentos na realização da investigação e atividades envolvidas.

Quadro 1 – Momentos na realização de uma investigação.

MOMENTOS	ATIVIDADES ENVOLVIDAS
Exploração e formulação de questões	1. Reconhecer uma situação problemática; 2. Explorar a situação problemática; 3. Formular questões.
Conjecturas	1. Organizar dados; 2. Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura.
Testes e reformulação	1. Realizar testes; 2. Refinar uma conjectura.
Justificação e avaliação	1. Justificar uma conjectura; 2. Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Fonte: Ponte *et al.* (2016, p.21).

Durante o processo da investigação, o importante “[...] é o surgimento de descobertas inesperadas [...]” e não solução do problema proposto. Assim, o processo de construção de

conhecimento se torna envolvente e prazeroso (Ramos, 2015, p.23). Após o último momento da investigação, a discussão do trabalho se torna o mais importante, pois são compartilhados os conhecimentos assimilados, promovendo aos estudantes o significado de investigar.

3. Procedimentos Metodológicos

Realizou-se uma pesquisa qualitativa, do tipo intervenção pedagógica. Uma pesquisa de caráter qualitativo se preocupa com o aprofundamento da compreensão de um grupo e seus métodos buscam significados (Gerhardt & Silveira, 2009). A intervenção pedagógica é como prática de ensino inovadora, as quais são planejadas, implementadas e avaliadas, com o intuito de maximizar a aprendizagem dos alunos (Damiani, Rochefort, Castro, Dariz & Pinheiro, 2013).

Diante do objetivo geral da pesquisa, elaborou-se uma proposta didática dividida em quatro etapas.

1ª Etapa: O que é Fractal? Apresentação de um vídeo² explicativo abordando a presença dos Fractais na natureza e na sociedade, abordando alguns especiais, como o Curva de Koch e Esponja de Menger.

2ª. Etapa: Realização das atividades nas estações. Cinco estações foram elaboradas, em cada continha uma atividade, com o intuito de promover a investigação matemática. Em cada abordava um Fractal diferente. Em cada estação, os alunos realizam uma leitura sobre o fractal e o exploram com algum recurso. O objetivo é encontrar padrões por meio das progressões e generalizar para qualquer iteração do Fractal. Para a descoberta, os alunos analisam os dados, formulam conjecturas, realizam testes e justificam.

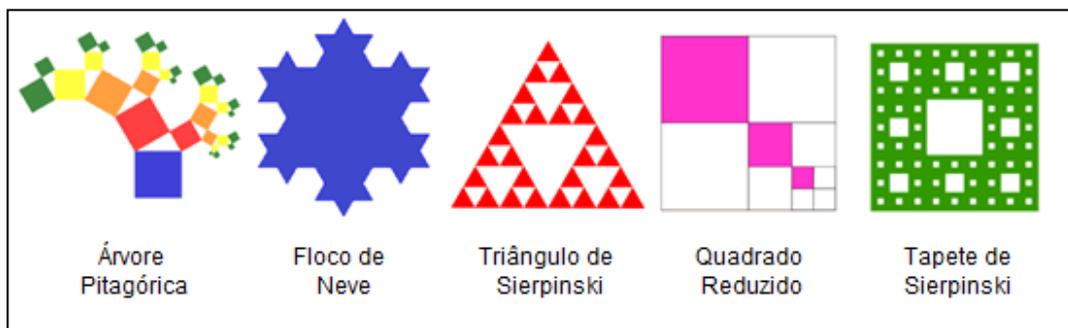
Os Fractais selecionados para cada estação foram: Árvore Pitagórica, Floco de Neve, Pirâmide de Sierpinski, Quadrado Reduzido e Tapete de Sierpinski. Para a exploração destas, utilizou-se diversos recursos como: colagem de quadrados coloridos; *software* GeoGebra no computador e no *smartphone*; material concreto e régua como instrumento geométrico.

As estações eram identificadas com marcadores relacionados ao Fractal trabalhado (Figura 1). As atividades foram organizadas em duas etapas (exceto a Árvore Pitagórica, que em uma parte deveria construir o fractal). A primeira etapa se chama Conhecendo o Fractal.

² Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=WFtTdf3I6Ug>. Acesso em 05 out 2018.

Nesta, apresenta-se um breve relato histórico e como é feito a sua construção. A segunda etapa se chama Investigando o Fractal. É nesse momento que se utiliza um recurso diferente. Os alunos investigam a variação dos níveis dos Fractais registram suas observações, completam tabelas e generalizam padrões.

Figura 1 – Marcadores das estações.



Fonte: Elaboração própria.

Descreve-se de forma breve as atividades elaboradas para cada estação.

(i) A Estação Árvore Pitagórica – Na primeira parte, apresenta-se exemplos de outras Árvore Pitagóricas. Na segunda, utilizando a colagem de quadrados coloridos, solicita a construção de uma Árvore Pitagórica Isósceles até o nível 4. Na terceira, iniciam-se as investigações sobre a quantidade de quadrados novos; a relação entre medida do lado do quadrado novo e área do quadrado. Por fim, a questão desafio remete ao total de quadrados, gerando uma soma de PG.

(ii) A Estação Floco de Neve – Nessa estação, utilizou-se o GeoGebra no *smartphone* como ferramenta, disponibilizando um *applet* com o Fractal. Na primeira parte, há a Curva de Koch, para que os alunos consigam fazer uma analogia ao Floco de Neve. Na segunda, com o auxílio do recurso, os alunos analisam o número de segmentos, medida do lado e perímetro. Por fim, na questão desafio, na qual é dado o perímetro, os alunos devem descobrir a iteração que lhe corresponde.

(iii) A Estação Pirâmide de Sierpinski – Inicia-se o processo de iteração do Triângulo de Sierpinski, e generaliza para uma terceira dimensão, obtendo assim o fractal desejado. Na segunda parte, os alunos recebem uma pirâmide, observam uma das faces, registram quantos triângulos distintos conseguem identificar e representam até o nível três. Em seguida, registra-se o número de triângulos encontrados e a medida do lado em cada nível. Por fim, os alunos devem observar a Pirâmide e identificar os tetraedros gerados e generalizar para qualquer nível.

(iv) A Estação Quadrado Reduzido - Nessa atividade, os alunos devem construir o Fractal, de acordo com as instruções dadas, na malha quadriculada e com régua disponibilizada. Após, analisam o total de quadrados e a área pintada.

(v) A Estação Tapete de Sierpinski – É disponibilizado um arquivo no GeoGebra no computador, para investigar o total de quadrados rosas, lados dos novos quadrados retirados, área dos novos quadrados e total de quadrados retirados. Por fim, verificar a veracidade da afirmação “A área do Tapete de Sierpinski é zero!”.

3ª. Etapa: Matemática e Arte. Com o intuito de apresentar a beleza dos Fractais se exhibe um vídeo³ sobre a sua construção e solicita a criação de um. Para isso, se disponibiliza diferentes tipos de malhas e hidrocor.

4ª. Etapa: Lista de Exercícios. Nesta são revistas as generalizações dos padrões abordados durante o trabalho por meio de exercícios de vestibulares.

Na próxima seção, apresentam-se os resultados das atividades que compõem cada uma dessas etapas.

4. Resultados e discussão

A experimentação das atividades foi realizada com os alunos da segunda série do Ensino Médio e foram necessários três encontros, que ocorreram em horário regular de aula, totalizando seis aulas. A turma tinha 25 alunos, destes 21 alunos participaram dos três encontros. Portanto, os alunos foram divididos em cinco grupos que foram identificados como A, B, C, D e E.

O primeiro encontro ocorreu no dia 30 de outubro de 2018, com duração de uma hora aula (equivalente a 45 minutos), no formato de revisão, visto que os alunos estudaram o conteúdo de progressões no final da série anterior.

Mais da metade da turma lembrava das fórmulas, principalmente a do termo geral e da soma dos primeiros termos de uma progressão aritmética. Não apresentaram dificuldades em generalizar e nem descobrir o termo proposto das questões dispostas.

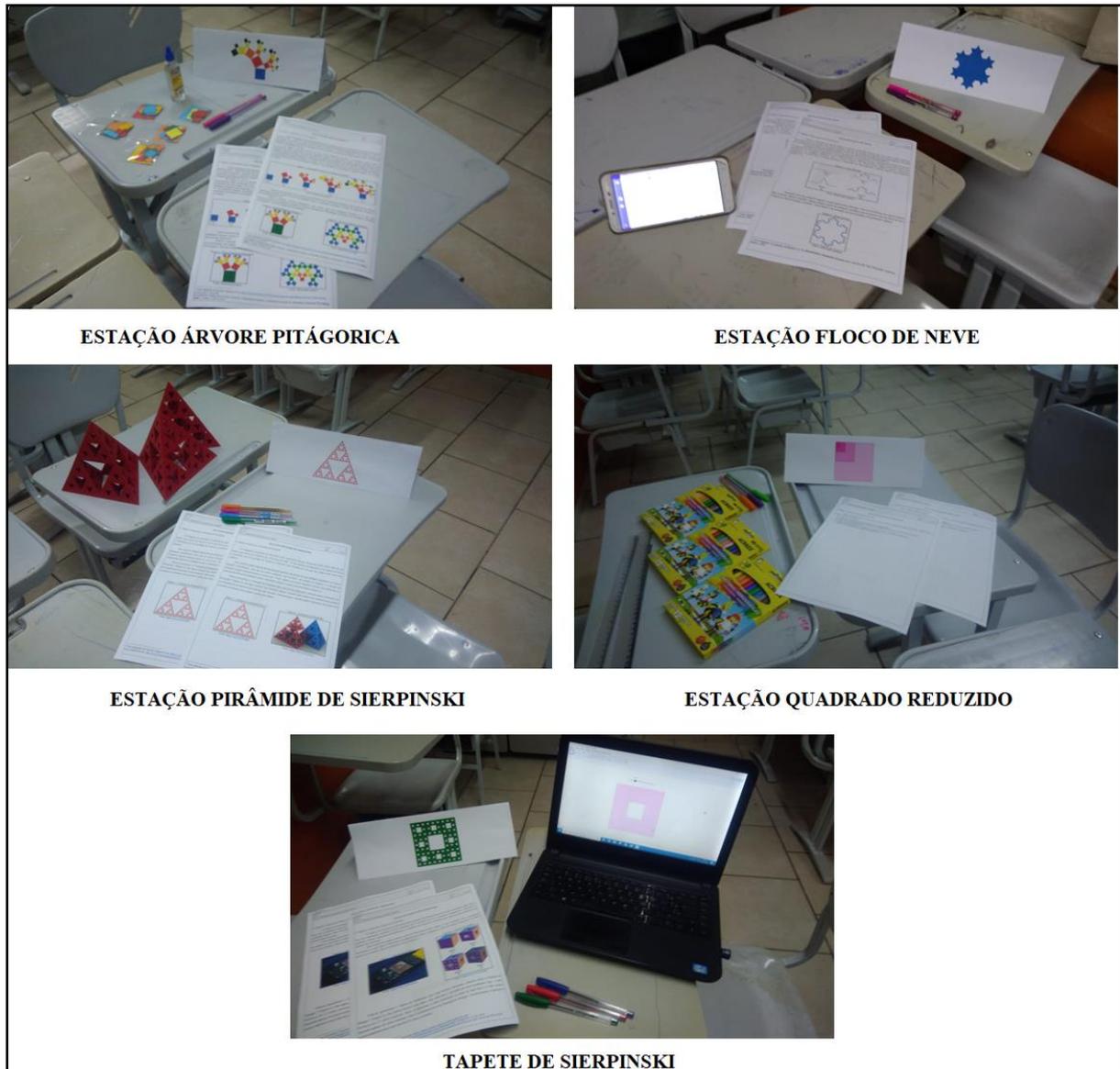
Por fim, foi dito aos alunos que na próxima aula seria realizada uma atividade diferente envolvendo Fractais. Somente dois alunos já ouviram falar nesse termo.

³ Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=DK5Z709J2eo&t=41s>. Acesso em 05 out 2018.

O segundo encontro ocorreu no dia 06 de novembro de 2018, com duração de duas horas aula (equivalente a 90 minutos).

Os alunos se depararam com a sala de aula no formato diferente e ficaram surpresos com a arrumação. Logo começaram a perguntar como deveriam se sentar (Figura 2). A professora deixou-lhes à vontade e, em seguida apresentou-se as etapas da sequência didática.

Figura 2 – Arrumação das estações antes da chegada dos alunos.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Antes de iniciar as etapas da sequência didática, a professora comentou com os alunos sobre o Ensino Híbrido e a Rotação por Estações. Na primeira parte, Apresentação dos Fractais, os alunos assistiram ao vídeo atentamente e depois começaram a dialogar dando enfoque a presença dos Fractais na natureza.

Na segunda etapa, os alunos se organizaram em cinco grupos e foram informados que não existia uma sequência e que deveriam escolher uma das estações para iniciar. Os grupos foram nomeadas em A, B, C, D e E. O grupo A iniciou na Estação Floco de Neve, o B, na Estação Árvore Pitagórica, o C, na Estação Pirâmide de Sierpinski, o D, na Estação Quadrado Reduzido e o E, na Estação Tapete de Sierpinski.

A sala de aula foi arrumada de forma que cada estação pudesse receber dois grupos. Na seção 4, será relatado o desenvolvimento dos grupos em cada estação.

De modo geral, os alunos realizaram atentamente a leitura do texto introdutório do Fractal. Um aluno lia em voz alta para os demais do grupo. O primeiro grupo a terminar foi o A, que realizou em 35 minutos, a atividade proposta na estação Floco de Neve. O Quadro 2 apresenta a distribuição dos grupos nas estações no segundo encontro.

Quadro 2 – Distribuição dos grupos nas estações no segundo encontro.

GRUPO	PRIMEIRA ESTAÇÃO	SEGUNDA ESTAÇÃO	TERCEIRA ESTAÇÃO
A	Floco de Neve	Quadrado Reduzido	Árvore Pitagórica
B	Árvore Pitagórica	Pirâmide de Sierpinski	----
C	Pirâmide de Sierpinski	Quadrado Reduzido	----
D	Quadrado Reduzido	Pirâmide de Sierpinski	----
E	Tapete de Sierpinski	Quadrado Reduzido	----

Fonte: Elaboração própria.

No terceiro encontro, realizado no dia 13 de novembro de 2018, com duração de três horas aulas (135 minutos), a sala de aula estava novamente arrumada de acordo com Rotação por Estações.

Ao entrarem logo se posicionaram em uma das estações que não tinha realizado as atividades. Os alunos permaneceram com os mesmos grupos e os que faltaram no encontro anterior, escolheram um grupo para realizar a atividade. O grupo A permaneceu na mesma estação, pois não tinha finalizado. Os demais escolheram novas estações, como mostra no Quadro 3.

Quadro 3 – Distribuição dos grupos nas estações no terceiro encontro.

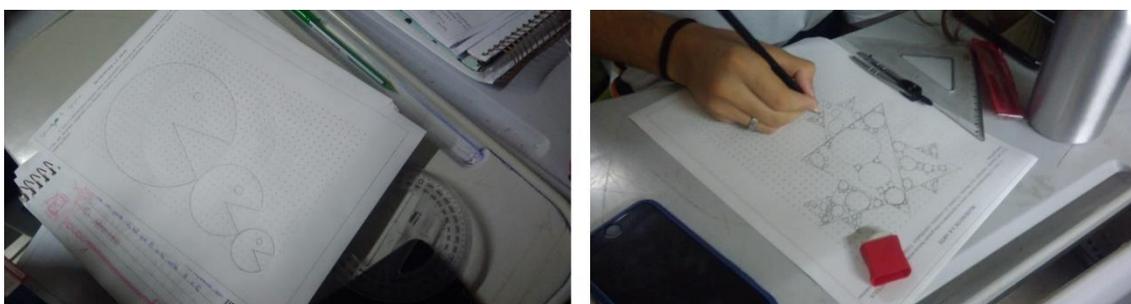
GRUPO	TERCEIRA ESTAÇÃO	QUARTA ESTAÇÃO	QUINTA ESTAÇÃO
A	----	Pirâmide de Sierpinski	Tapete de Sierpinski
B	Tapete de Sierpinski	Quadrado Reduzido	Floco de Neve
C	Árvore Pitagórica	Floco de Neve	Tapete de Sierpinski
D	Floco de Neve	Árvore Pitagórica	Tapete de Sierpinski
E	Pirâmide de Sierpinski	Floco de Neve	Árvore Pitagórica

Fonte: Elaboração própria.

Para a realização das estações, foram planejadas duas horas aulas, a outra aula era para a terceira etapa da sequência didática, Matemática e Arte. Porém, os alunos utilizaram 20 minutos da terceira aula para concluir as estações.

Na terceira etapa, apresentou-se o vídeo sobre criação de Fractais e despertou o interesse dos alunos. Distribuiu-se folhas pontilhadas para a criação do desenho. Alguns alunos não conseguiram terminar o desenho durante a aula (Figura 3). Eles pediram para que pudessem entregar na próxima aula.

Figura 3 – Alunos construindo seus Fractais.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Além disso, receberam a lista de exercícios, que era a quarta etapa da sequência didática. Os grupos se reuniram no contraturno na biblioteca da escola para resolver os exercícios. A lista deveria ser resolvida e entregue na semana seguinte.

Os alunos responderam sete questões envolvendo os Fractais que foram trabalhados. Pode-se perceber que tiveram mais facilidade, já que conheciam os Fractais. Após as provas, retomou os exercícios da lista e realizou a correção das questões que os alunos apresentaram mais dúvidas.

4.1 Discussão das estações

A primeira estação de cada grupo foi a mais demorada. A partir da segunda estação o tempo foi reduzindo. Atribui-se o tempo maior ao fato das atividades investigativas serem diferentes das que estão acostumados a realizar. Já a redução decorreu a semelhança das atividades. Descrevem-se os aspectos mais importantes que ocorreram em cada estação e um quadro, com uma análise mais detalhada, das respostas dos grupos. Estas foram verificadas e classificadas em correta, incompleta e incorreta.

(i) Estação Árvore Pitagórica

O grupo A realizou corretamente as atividades, exceto a questão desafio, que deixou incompleta. O grupo não percebeu que a sequência formada era a soma de uma progressão geométrica, de razão 2. O grupo B também foi muito bem, realizou corretamente as questões, exceto a 3. Pois relacionou o número de triângulos formados e não ao número de quadrados. Destaca-se que a questão 6 foi generalizada sem completar todos os níveis. O grupo C não conseguiu construir a árvore completamente (Figura 3), visto que faltaram quadrados no nível 4, pois construíram a árvore na vertical. O restante da atividade o grupo respondeu de forma correta. Logo conseguiram descobrir o padrão para qualquer nível, pois o registro foi feito antes de pedir o nível n .

Figura 4 – Alunos do grupo C construíram a Árvore Pitagórica na vertical.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

O grupo D teve mais dificuldade Analisou o Fractal de forma breve. Não lembrou do Teorema de Pitágoras para calcular o lado do triângulo, logo realizou os cálculos de forma incorreta e não conseguiram generalizar. O grupo E realizou corretamente as atividades. Vale ressaltar que, ao analisar a quantidade de quadrados novos, associou a uma progressão geométrica de razão 2, sem completar todos os níveis. Completou a tabela da questão desafio, porém não conseguiu generalizar e nem explicar o padrão da sequência.

Quadro 4 – Análise das questões da Árvore Pitagórica.

Atividades		Resolução		
		Correta	Incompleta	Incorreta
Construção da Árvore		A, B, D, E	C	
Análise do Fractal		A, B, E	C, D	
Quantidade de Quadrados	2	A, B, C, D, E		
	3	A, C, D, E	B	
	4	A, B, C, D, E		
Medida do lado do quadrado	5	A, B, C, E		D
	6	A, B, C, E		D
	8	A, B, C, E		D
Área do Quadrado	5	A, B, C, D, E		
	7	A, B, C, D, E		
	8	A, B, C, D, E		
Desafio	9	A, B, C, D	E	
	10	B, C	A, E	D

Fonte: Souza (2019, p. 93).

(ii) Estação Floco de Neve

O grupo A respondeu as atividades de forma correta, exceto a questão 5. Escreveu um padrão que não atendia todos os níveis. Após completar os níveis 5, 6 e n , o grupo percebeu o equívoco e formulou uma nova conjectura e conseguiu generalizar. O grupo B errou somente a questão desafio, pois não lembraram das propriedades de logaritmo. A professora o auxiliou, colocando as propriedades no quadro e realizou alguns exemplos. O grupo C respondeu toda a atividade de forma correta. Logo na primeira questão o grupo conseguiu perceber a progressão geométrica da sequência formada pelo número de segmentos. Percebe-se que na resolução o grupo fez algumas tentativas até conjecturar corretamente o padrão. Todos os integrantes do grupo faziam a análise do Fractal e depois debatiam (Figura 5).

Figura 5 – Grupo C explorando o Floco de Neve no *smartphone*.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

O grupo D, teve mais dificuldade. Não conseguiu generalizar nenhum padrão, pois associaram a razão de uma progressão aritmética e não de uma progressão geométrica. Percebe-se que este não testaram as conjecturas encontradas. O grupo E teve somente dificuldade na questão desafio. A professora também auxiliou, porém não conseguiram efetuar os cálculos. O restante das questões respondeu de forma correta.

Quadro 5 - Análise das questões do Floco de Neve.

Atividades		Resolução		
		Correta	Incompleta	Incorreta
Análise do Fractal		A, C	B, D, E	
Número de segmentos	2	A, B, C, D, E		
	3	A, B, C, D, E		
	6	A, B, C, E	D	
Medida do lado	2	A, B, C, E		D
	4	A, B, C, E		D
	6	A, B, C, E		D
Perímetro	2	B, C, E		A, D
	5	B, C, E	A, D	
	6	A, B, C, E		D
Desafio	7	A, C	E	B, D
	8	A, C	E	B, D

Fonte: Souza (2019, p. 95).

(iii) Estação Pirâmide de Sierpinski

O grupo A não apresentou dificuldades em generalizar e completou a tabela corretamente em forma de potência. O grupo B realizou a atividade de forma correta, exceto a primeira questão, pois não retirou os triângulos do nível anterior (Figura 6).

Figura 6 – Grupo B pintando os níveis do Fractal.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Isso foi notado quando a professora andava pela sala e sentou-se com o grupo para explicar a iteração do Fractal voltando a teoria. O grupo C e E responderam tudo corretamente. Conseguiram generalizar os padrões antes de completar os níveis solicitados. O grupo D explicou corretamente os padrões, mas teve dificuldade em generalizar os padrões matematicamente. Alegaram que tiveram dificuldade em visualizar que o Fractal era gerado por remoção.

Quadro 6 - Análise das questões da Pirâmide de Sierpinski.

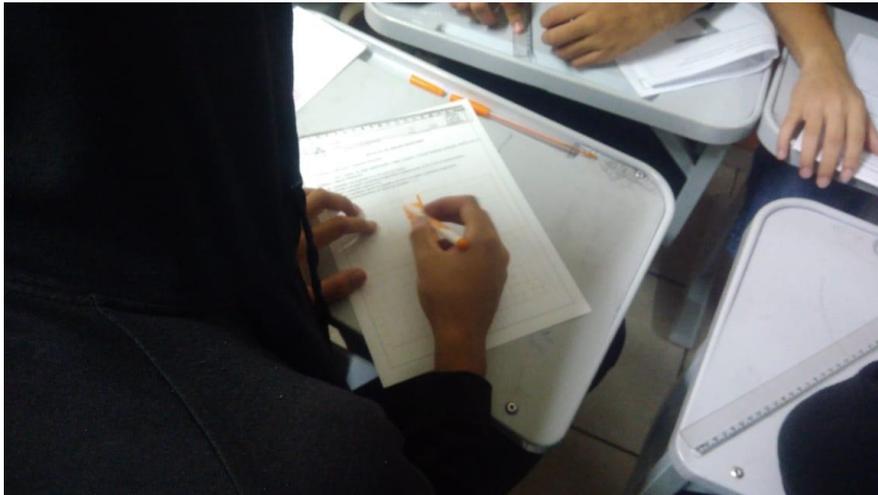
Atividades		Resolução		
		Correta	Incompleta	Incorreta
Quantidade de triângulos distintos na pirâmide		B, C, D, E		A
Identificação dos níveis		A, C, D, E		B
Número de triângulos	3	A, B, C, D, E		
	4	A, B, C, D, E		
	6	A, B, C, E	D	
Medida do lado	3	B, C, D, E	A	
	5	A, B, C, D, E		
	6	A, B, C, E	D	
Número de tetraedros gerados	7	A, B, C, D, E		
	8	A, B, C, D, E		
	9	A, B, C, E	D	

Fonte: Souza (2019, p. 97).

(iv) Estação Quadrado Reduzido

O grupo A realizou corretamente todas as questões (Figura 7) exceto a questão 5, pois tiveram dificuldade em utilizar a fórmula de um termo qualquer de uma progressão aritmética. Lembraram-se da fórmula, porém não terminaram de generalizar.

Figura 7 – Grupo A construindo o Quadrado Reduzido.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

O grupo B respondeu todas as questões corretamente. Além disso, foi o único grupo que trabalhou com a base dois para generalizar a área pintada. O grupo C fez a construção corretamente do Fractal, porém na hora de analisar, confundiu a quantidade de quadrados que existam naquele nível. O grupo D ficou com dúvida na construção do Fractal. Inicialmente, construiu como a placa de identificação da estação. Não conseguiu explorar o Fractal e pediu auxílio da professora, a qual leu as orientações com o grupo e passaram a assumir L como o lado do quadrado dado. O grupo pediu uma nova folha para construir novamente o Fractal. Explicou corretamente o padrão de cada sequência formada, porém generalizou de forma incorreta. O grupo E respondeu corretamente todas as questões.

Quadro 7 - Análise das questões do Quadrado Reduzido.

Atividades		Resolução		
		Correta	Incompleta	Incorreta
Construção do Fractal		A, B, C, D		E
Análise do Fractal		A, B, C, D, E		
Total de Quadrados	2	A, B, D, E		C
	3	A, B, D, E		C
	5	B, E	A, D	C
Área Pintada	2	A, B, C, D, E		
	4	A, B, C, D, E		
	5	A, B, C, E	D	

Fonte: Souza (2019, p. 98).

(v) Estação Tapete de Sierpinski

O grupo A teve muita dificuldade na análise desse Fractal. Não conseguiu visualizar o total de quadrados rosa e afirmou que era uma progressão geométrica de razão 10. Não conseguiram imaginar que a área do Tapete de Sierpinski é zero quando tendia ao infinito. O grupo B (Figura 8) na questão desafio associou a soma da progressão geométrica, porém não utilizou a fórmula.

Figura 8 – Alunos lendo em grupo o Tapete de Sierpinski.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

O grupo C não realizou totalmente as primeiras questões e achou difícil visualizar as iterações do Fractal. O grupo D teve dificuldade na questão desafio. Utilizou a soma dos termos de uma progressão geométrica, porém não conseguiu generalizar. O grupo E resolveu todas as questões corretamente, exceto a questão 11, que apenas apresentou uma justificativa sem utilizar o cálculo.

Quadro 8 - Análise das questões do Tapete de Sierpinski.

Atividades		Resolução		
		Correta	Incompleta	Incorreta
Análise do Fractal		A, B, D, E	C	
Total de quadrados rosas	2	B, C, D, E		A
	3	B, D, E	C	A
	4	B, D, E	C	A
Lado dos novos quadrados retirados	5	B, C, D, E		A
	6	B, C, D, E		A
	8	B, C, D, E		A
Área dos novos quadrados retirados	5	B, C, D, E		A
	7	B, C, D, E		A
	8	B, C, D, E		A
Desafio	9	B, D, E		A, C
	10	B, E	C, D	A
“A área do Tapete de Sierpinski é zero!”	11	B	C, D	A, E

Fonte: Souza (2019, p. 100).

De modo geral, os alunos trocaram ideias com os colegas e promoveram discussões. Essa participação ativa é uma condição fundamental da aprendizagem (Ponte *et al.*, 2016). A dificuldade maior ocorreu nas primeiras estações, visto que não era costume trabalhar com questões investigativas. Além disso, a professora estava tirando dúvidas de um grupo, dois outros grupos tiravam dúvidas entre si, pois um deste grupo já tinha passado pela estação.

Durante a realização das atividades das estações, percebeu-se que alguns componentes do grupo estavam mais engajados e participativos que outros. Entretanto, trabalharam coletivamente.

A estação Tapete de Sierpinski foi considerada a mais difícil, visto que os alunos levaram mais tempo e pediram com mais frequência o auxílio da professora. A Rotação por Estações proporciona que o professor possa estar mais próximos dos grupos, garantindo o acompanhamento dos alunos que precisam de mais atenção (Bacich *et al.*, 2015).

Conclui-se que os alunos aprovaram as atividades desenvolvidas em todas as etapas da proposta didática. A utilização dos diversos recursos nas estações despertou a participação ativa dos alunos e a curiosidade. Além disso, as atividades investigativas em grupo os deixaram entusiasmados, visto que nas aulas de Matemática isso não era comum. As discussões promovidas contribuíram para o estudo do tema.

5. Considerações Finais

Essa pesquisa teve por objetivo relacionar os Fractais com o estudo de Progressões com o auxílio do Ensino Híbrido por meio da Rotação por Estações. Elaboram-se atividades investigativas com o auxílio de diversos recursos, para associar Fractais e o conteúdo de progressões, que muitas vezes é ensinado com aplicação de fórmula e de forma mecanizada.

Os alunos do Ensino Médio logo se identificaram com a proposta didática. Apresentando entusiasmo e curiosidade. As atividades das estações foram o diferencial neste trabalho. Os alunos tiveram autonomia para escolher a estação que iriam começar, seja pela atração do Fractal ou o recurso utilizado na exploração.

Além disso, as atividades promoveram um envolvimento ativo nos alunos e estes sentiram à vontade com o tempo que determinaram, para explorar e pensar nas suas ideias. Tendo como finalidade a de explorarem, formularem, testarem e validarem as conjecturas, momentos da realização de uma investigação matemática. Com a construção dos próprios Fractais, ficou evidente que os alunos entenderam o conceito de Fractal.

O uso de Rotação por Estações tornou o aluno mais ativo em seu próprio ensino e aprendizagem e um desafio para o professor. Proporcionou que o ambiente da sala de aula tornasse mais atrativa e aconchegante. Os alunos superaram as dificuldades, trabalharam em grupo, trocaram ideias e exploraram conceitos. Além disso, promoveu um contato mais próximo entre os alunos e a professora.

Faz-se necessárias mudanças nas salas de aula, com o aproveitamento de modalidades híbridas e tecnologias digitais, pois estas estão presentes na vida dos alunos. O Ensino Híbrido permite ao professor trabalhar de forma diferenciada e possibilita realizar ajustes necessários em sua própria realidade.

Diante deste trabalho, pretende-se explorar outros Fractais e aplicar em outros conteúdos, como potenciação, função exponencial e semelhança de figuras. Além disso, aplicar outras categorias do Ensino Híbrido, despertando o interesse e a participação ativa dos alunos.

Referências

Bermejo, A. P. B. & Moraes, M. S. F., Graça, V. V. (2010) Análise das dificuldades do ensino de progressões. *Anais...In: Encontro Paraense de Educação Matemática - Belém, BA: 7, 2010.*

Bacich, L. (2016). Ensino híbrido: proposta de formação de professores para uso integrado das tecnologias digitais nas ações de ensino e aprendizagem. *Anais ... In: Congresso Brasileiro de Informática na Educação – Uberlândia, MG: 5, 2016*

Bacich, L. & Moran, J. (2018). Metodologias ativas para uma educação inovadora. Penso: Porto Alegre, 2018.

Bacich, L., Tanzi Neto, A. & Trevisani, F. M. (2015). Ensino Híbrido: Personalização e tecnologia na educação. Penso: Porto Alegre, 2015

Barbosa, R. M.(2005). Descobrimo a Geometria Fractal para sala de aula. Autêntica: Belo Horizonte, 2005

Brasil. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Matemática. Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

Brasil. Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências, Matemática e suas Tecnologias. Ensino Médio. Brasília, MEC/SEF, 2000.

Christensen, C., Horn, M. & Staker, H. (2013). Ensino Híbrido: uma inovação disruptiva? Uma introdução à teoria dos híbridos. Recuperado de < https://www.pucpr.br/wp-content/uploads/2017/10/ensino-hibrido_uma-inovacao-disruptiva.pdf>.

Damiani, M. F., Rochefort, R. S., Castro, R. F., Dariz, M. R. & Pinheiro, S. S. (2013). Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. Recuperado de < <https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=2ahUKEwjBoY3D7oDiAhX4GrkGHRYhAIMQFjAAegQIAhAC&url=https%3A%2F%2Fperiodicos.ufpel.edu.br%2Ffojs%2Findex.php%2Fcaduc%2Farticle%2Fdownload%2F3822%2F3074&usg=AOvVaw0RoHLTKHoSS5Y9uHtnfI7e>> .

Gerhardt, T. E., Silveira, D. T. (2009). Métodos de Pesquisa. Editora UFRGS: Porto Alegre, 2009.

Horn, M. B. & Staker, H. (2015) Blended: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Penso: Porto Alegre, 2015

Leivas, J. C. P., Cury, H. N. (2008) Atividades com fractais em uma proposta de inovação curricular para cursos de formação de professores. *Anais...* In: Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática - Rio de Janeiro, RJ, 4.

Lorenzato, S. Para aprender matemática. Autores Associados: Campinas, 2010.

Luiz, E. A. & Col, L. (2013). Alternativas metodológicas para o ensino de matemática visando uma aprendizagem significativa. *Anais...* In: Congresso Internacional de Ensino de Matemática – Canoas, RS, 6.

Ponte, J., Brocardo, J. & Oliveira, H. Investigações matemáticas na sala de aula. 2. Autêntica: Belo Horizonte, 2016.

Rodrigues Júnior, E. & Castilho, N. M. (2016) Uma experiência em ação: aprofundando conceito e inovando a prática pedagógica através do ensino híbrido. *Anais...* In: Simpósio Internacional de Educação a Distância e Encontro de Pesquisadores em Educação a Distância – São Carlos, SP

Sallum, E. M. (2005) Fractais no ensino médio. Revista do Professor de Matemática, 57.

Souza, P. A. (2019). Uma proposta didática para o estudo de progressões por meio dos fractais: rotação por estações. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual Norte do Fluminense, Campos dos Goytacazes, RJ.

Souza, P. A., Torre, O. A. P. L. & Peixoto, G. T. B. (2019). Uma proposta didática para o estudo de progressões por meio dos fractais utilizando o ensino híbrido. Anais... In: Encontro Nacional de Educação Matemática – Cuiabá, MT: XIII, 2019

Trevisani, F. M. Ensino Híbrido, o que é e como utilizá-lo? Recuperado de < <https://silabe.com.br/blog/ensino-hibrido-o-que-e> >.

Porcentagem de contribuição de cada autor no manuscrito

Pâmella de Alvarenga Souza – 50%

Oscar Alfredo Paz La Torre – 25%

Gilmara Teixeira Barcelos Peixoto – 25%