Research, Society and Development, v. 9, n. 10, e6999108796, 2020
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i10.8796

Articulação entre os níveis de funcionamento dos conhecimentos e os registros de representações semióticas em tarefas de probabilidade

Articulation between knowledge operating levels and semiotic representation records in probability tasks

Articulación entre niveles operativos del conocimiento y registros de representación semiótica en tareas de probabilidad

Recebido: 25/09/2020 | Revisado: 29/09/2020 | Aceito: 13/10/2020 | Publicado: 15/10/2020

Sergiano Guerra de Oliveira
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5089-7723
Universidade Cruzeiro do Sul, Brasil
E-mail: serguerra2009@gmail.com
Cíntia Aparecida Bento dos Santos
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8604-2890
Universidade Cruzeiro do Sul, Brasil
E-mail: cintia.absantos@gmail.com
Laura Marisa Carnielo Calejon
ORCID: https://orcid.org/0000-001-8612-1791
Centro de Desenvolvimento Pessoal e Profissional – CEDEPP, Brasil
E-mail: lauracalejon@gmail.com

Resumo

Este artigo tem por objetivo investigar de que modo os Níveis de Funcionamento dos Conhecimentos se articulam aos Registros de Representações Semióticas esperados para as tarefas no campo da Probabilidade. Esta articulação é fruto do estudo teórico de uma pesquisa desenvolvida e já concluída em um Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática. Trata-se uma pesquisa qualitativa e que se refere a um estudo bibliográfico realizado à luz da abordagem teórica dos Níveis de funcionamento dos conhecimentos esperados pelos educandos e da teoria dos Registros de Representações Semióticas, que possibilitou entender os processos de compreensão e resolução de tarefas. Este estudo nos fez inferir que as análises de tarefas constituem-se em um caminho relevante no processo de avaliação, ensino e aprendizagem e contribui efetivamente para a compreensão das exigências do processo de produção do conhecimento científico.

Palavras-chave: Níveis de Funcionamento dos Conhecimentos; Registros de Representações Semióticas; Resolução de Tarefas; Probabilidade.

Abstract

This article aims to investigate how the Levels of Functioning of Knowledge are linked to the Records of Semiotic Representations expected for tasks in the field of Probability. This articulation is the result of the theoretical study of a research developed and already concluded in a Professional Master's in Science and Mathematics Teaching. This is a qualitative research that refers to a bibliographic study carried out in the light of the theoretical approach of the Levels of functioning of knowledge expected by students and the theory of Semiotic Representation Records, which made it possible to understand the processes of understanding and solving tasks. This study made us infer that the task analysis constitutes a relevant path in the evaluation, teaching and learning process and contributes effectively to the understanding of the requirements of the scientific knowledge production process.

Keywords: Knowledge Functioning Levels; Semiotic Representation Records; Task Resolution; Probability.

Resumen

Este artículo tiene como objetivo investigar cómo los Niveles de Funcionamiento del Conocimiento están vinculados a los Registros de Representaciones Semióticas esperados para tareas en el campo de la Probabilidad. Esta articulación es el resultado del estudio teórico de una investigación desarrollada y ya concluida en un Máster Profesional en Didáctica de las Ciencias y las Matemáticas. Se trata de una investigación cualitativa que hace referencia a un estudio bibliográfico realizado a la luz del abordaje teórico del funcionamiento de los Niveles de conocimiento esperado por los estudiantes y la teoría de Registros de Representación Semiótica, que permitió comprender los procesos de comprensión y resolución de tareas. Este estudio nos hizo inferir que el análisis de tareas constituye un camino relevante en el proceso de evaluación, enseñanza y aprendizaje y contribuye efectivamente a la comprensión de los requerimientos del proceso de producción del conocimiento científico.

Palabras clave: Niveles de funcionamiento del conocimiento; Registros de representación semiótica; Resolución de tareas; Probabilidad.

1. Introdução

Tendo em vista a relevância do ensino e da aprendizagem de Probabilidade com alunos do Ensino Médio, bem como, da sua aplicabilidade nas mais variadas áreas do conhecimento, deparamo-nos com a necessidade de saber como os Níveis de Funcionamento dos Conhecimentos se articulam aos Registros de Representações Semióticas relacionados às tarefas com esse tema. Para Robert (1998), “As Tarefas são associadas a enunciados de exercícios (atividades, problemas), elas tendem a dar conta de um funcionamento que é descrito no modo matemático”.

Batanero (2002) salienta que “é notável, entre pesquisadores do mundo todo, enorme preocupação com o ensino de conteúdos Estatísticos e a Probabilidade é um ramo dessa disciplina”.

De acordo com Batanero (2002, p. 3), “em uma sociedade imprevisível, como a que estamos inseridos, nos traz insegurança sobre o modo mais adequado de preparar os jovens, quais são os conteúdos a serem ensinados e que não se tornarão ultrapassados em pouco tempo”. Tal argumento reforça a nossa escolha sobre o tema Probabilidade que consta nas recentes discussões da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que define quais conteúdos a ensinar e o que se deseja que os estudantes saibam em diferentes anos de escolarização. Para Neto (2014), os Parâmetros Curriculares Nacional (PCNs) “São referenciais para todas as escolas do país a fim de que elas garantam aos estudantes uma educação básica de qualidade”.

A probabilidade como conteúdo a ser ensinado no Ensino Básico por se tratar de um conjunto de conhecimentos importante na formação do jovem, sendo a etapa fundamental da Educação Básica do aluno. É fato que este tema compõe-se de uma diversidade de representações do mesmo objeto Matemático e por consequência apresentados em níveis de dificuldades distintas, e dessa forma esta diversidade de representações unidas a disponibilidade de apelos cognitivos diferentes pelos alunos a nosso ver são geradores de tantas dificuldades para eles de disporem seus conhecimentos Matemáticos.

Apoiados na literatura da didática francesa da Matemática, embasamo-nos nos trabalhos dos pesquisadores, Duval (1994) e Robert (1998), ambos com suas abordagens de cunho cognitivas assumem um papel relevante quando utilizados a estudo e aplicação de tarefas no campo da Matemática. Por este motivo vislumbramos levar estes quadros teóricos para o campo da Probabilidade. Assim sendo, este artigo tem como objetivo investigar de que modo os Níveis de Funcionamento dos Conhecimentos se articulam aos Registros de Representações Semióticas em tarefas de Probabilidade.

Cabe ressaltar que esta articulação é fruto da constituição teórica de uma pesquisa desenvolvida e já concluída no âmbito de um Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática. Maiores detalhes podem ser verificados em Oliveira (2018).

Mediante as três Tarefas de Probabilidade, pretende se analisar em que nível de funcionamento elas se encontram, conforme abordados por Robert (1998), sejam no nível Técnico, Mobilizável ou Disponível, e que tipos de registros de representação semióticas conforme Duval (1994) estão articulados, cada uma dessas tarefas.

Acredita-se também, que a aprendizagem e a apropriação dos conceitos de Probabilidade podem ser mais bem compreendidas pelo nível de mobilização dos conhecimentos e pela possibilidade de passar de uma forma de registro a outra, como por exemplo, do registro em língua natural para o registro algébrico ou do figural para o algébrico e numérico.

Partindo deste princípio, ao iniciar as análises das tarefas, considera-se necessário a explanação acerca da abordagem dos Níveis de Funcionamentos dos Conhecimentos abordados por Robert (1998), assim como a explicitação das principais ideias teóricas consolidadas por Duval (1994), quanto aos Registros de Representação Semiótica.

2. Os Níveis de Funcionamento dos Conhecimentos e os Registros de Representações Semióticas

Os conteúdos de Matemática a ensinar, são classificados, segundo Robert (1998) em quatro dimensões com o objetivo de estratificar a complexidade das noções matemáticas. Na quarta dimensão, abordou as características do funcionamento das noções que se relacionam às ferramentas, mudanças de pontos de vista que são capazes de intervir, se analisadas delicadamente os funcionamentos solicitados.

Para este artigo tomamos como referencial apenas a quarta dimensão, que trata dos “Níveis de Funcionamento dos Conhecimentos Pelos Alunos”, no entanto, objetivamos apresentar o nível de funcionamento dos conhecimentos esperados para as tarefas no campo da Probabilidade. Como cada tarefa não poderá ser analisada com apenas um conceito, e sim com uma variedade de conceitos, conclui-se que, sozinho, nenhuma tarefa e nenhum conceito poderá dar conta do processo isoladamente. Seguindo essa linha de estudos, propomos apresentar as análises das tarefas pautadas em um conjunto de conceitos inter-relacionados necessários às soluções das tarefas apresentadas e não apenas como conceito isolado fez-se necessário também o uso da aplicação de outros conceitos da matemática para a solução no campo da Probabilidade.

Quanto aos conhecimentos construídos pelos alunos, Robert descreve três níveis, definindo-os como níveis de Mobilização: Nível Técnico, Nível Mobilizável e Nível Disponível. Para Robert, o Nível Técnico Compreende.

> [...] às mobilizações indicadas, isoladas, que explicitam aplicações imediatas de teoremas, propriedades, definições, fórmulas etc. Trata-se então de contextualização simples, locais, sem etapas, sem trabalho preliminar de reconhecimento, sem adaptações. Isso se refere mais ao funcionamento de ferramentas (que compreendem definições). (Robert, 1998, p. 27).

No que se compreende a este nível, entendemos que quando o aluno consegue resolver o problema algebricamente utilizando-se de fórmulas, aplicações imediatas de teoremas, definições ou propriedades, mas não se limita ao resultado e consegue fazer interpretações muitas vezes em simples contextualizações sem muitas adaptações, entendemos que este aluno atendeu ao nível de conhecimento técnico. Para este nível de mobilização, exemplificamos com a tarefa apresentada na Figura 1.

Figura 1- Exemplo de tarefa no nível técnico

No lançamento de um dado viciado, a probabilidade de sair 6 é $\frac{3}{11}$. Qual a probabilidade de não sair 6?

Fonte: Dante, 2016, p.242.

Solução da tarefa Figura 1:

Se o dado é viciado, os eventos elementares não são equiprováveis. Sabe-se que

$$p(\Omega) = 1.$$

Desse modo, sendo A o evento: “sair o número 6”, tem-se:

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1.$$

Então, como

$$p(A) = \frac{3}{11}$$

Concluimos que:

$$\frac{3}{11} + p(\bar{A}) = 1 \Rightarrow 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11} \simeq 72{,}7\%$$

Para a solução dessa tarefa fica evidente a necessidade da aplicação imediata da

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i10.8796

Propriedade de eventos complementares,

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

A tarefa dada no exemplo trata-se de um dado viciado, neste caso, os eventos elementares não são equiprováveis. Sabemos que o espaço amostral é

$$(\Omega) = 1.$$

Assim, sendo A o evento, possibilidade de sair o número 6, basta aplicar a propriedade acima descrita. Observa-se explicito na tarefa o evento p(A), ou seja, a probabilidade de sair 6. Evidenciando assim, que se o aluno resolve essa tarefa e apresenta resposta correta ao que foi solicitado no enunciado, conclui-se que esta atende ao nível técnico de conhecimento.

Enquanto o Nível Mobilizável corresponde.

> a funcionamentos mais amplos: ainda indicados, mas que passa da simples aplicação de uma propriedade por sua vez. Isso pode ser, por exemplo, porque é necessário adaptar seus conhecimentos para aplicar o teorema adequado, ou mudar de ponto de vista ou de quadro (com indicações), isso pode ser porque é necessário aplicar várias vezes em seguida a mesma coisa ou utilizar várias coisas diferentes, em etapas sucessivas, ou porque é necessário articular duas informações de naturezas diferentes. Em todo caso, esse nível testa um funcionamento onde existe um princípio de justaposição de saberes em um dado domínio, e mesmo de organização, não há somente aplicação simples, as características ferramenta e objeto podem ser relacionadas. Mas o que está em jogo é explícito. Ou seja, um saber é dito mobilizável se, quando está bem identificado, é bem utilizado pelo aluno, mesmo se houve lugar para se adaptar ao contexto particular. (Robert, 1998, p. 28).

Entendemos que as tarefas apresentadas neste nível caracterizam-se por necessitar de um funcionamento mais amplo, contendo conhecimento técnico mais elevado ao nível apresentado anteriormente. A tarefa do nível mobilizável exige do sujeito um funcionamento que passa da simples aplicação de uma propriedade. Para a resolução das tarefas neste nível, são necessárias adaptações de conhecimentos para a aplicação de fórmula, teorema ou propriedades adequadas, ainda que seja com indicações. As tarefas neste nível testam um funcionamento, exigindo do sujeito um princípio de justaposição de saberes em um dado domínio, ou até mesmo de organização e o que está em jogo é explícito. Segundo Robert (1998) “um saber é dito mobilizável quando é bem identificado, bem utilizado pelo aluno, mesmo que tenha sido necessária uma adaptação do contexto particular”.

Uma diferença é apresentada entre o conhecimento técnico e o mobilizável, quando o aluno é capaz de mobilizar conhecimento fazendo certa adaptação mesmo que a noção em jogo esteja clara, um objeto como ferramenta para a resolução de tarefas.

Research, Society and Development, v. 9, n. 10, e6999108796, 2020
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i10.8796

Para o nível mobilizável de conhecimentos, trazemos como exemplo a tarefa apresentada na Figura 2.

Figura 2- Exemplo de tarefa no nível mobilizável.

Numa enquete foram entrevistadas 80 pessoas sobre os meios de transporte que utilizam para ir ao trabalho e/ou à escola. Quarenta e duas responderam ônibus, 28 responderam carro e 30 responderam moto. Doze utilizavam-se de ônibus e carro, 14 de carro e moto e 18 de ônibus e moto. Cinco utilizavam-se dos três: carro, ônibus e moto. Qual é a probabilidade de que uma dessas pessoas, selecionadas ao acaso, utilize:

a) somente ônibus?

b) somente carro?

c) carro e ônibus, mas não moto?

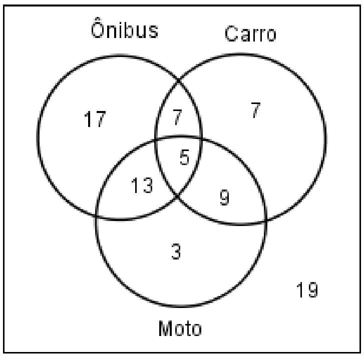
d) nenhum dos três veículos?

e) apenas um desses veículos?

Fonte: Dante, 2016, p.237.

Para a solução da tarefa da Figura 2, constrói-se o diagrama de Venn para representar o espaço amostral contido no enunciado e facilitar a análise e compreensão dos dados.

Figura 3- Diagrama de Venn.



Fonte: Oliveira, 2018, p. 41.

$$n(\Omega) = 80$$

A: somente ônibus

$$p(A) = 17 \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{17}{80} = 21{,}25\%$$

B: somente carro

$$p(B) = 7 \Rightarrow p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{7}{80} = 8{,}75\%$$

C: carro e ônibuos, mas não moto

$$p(C) = 3 \Rightarrow p(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{80} = 3{,}75\%$$

D: nenhum veículo

$$p(D) = 19 \Rightarrow p(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{19}{80} = 23{,}75\%$$

E: apenas um dos veículos. Somando-se apenas cada um dos eventos, obten-se

$$n(E) = 17 + 7 + 3 = 27$$

então,

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{27}{80} = 33{,}75\%$$

Esta tarefa trata-se do nível mobilizável uma vez que existe justaposição de saberes no domínio da Probabilidade, ou seja, corresponde à resolução pelo sujeito em que, apesar da noção em jogo estar explícita, é necessário realizar adaptação, em que o sujeito é obrigado a articular conhecimentos prévio para resolução da tarefa, portanto, a resolução não se encontra relacionada apenas à pura aplicação de uma fórmula ou teorema. Para essa solução faz se necessário que a organização dos dados seja por um esquema, um desenho ou um diagrama de Venn e, somente a partir das adaptações feitas, aplica-se o conhecimento necessário para alcançar os resultados que favoreçam a resolução da tarefa por meio da razão da Probabilidade. Enquanto que o Nível Disponível corresponde.

> ao fato de saber resolver o que está proposto sem indicações, de procurar em seus próprios conhecimentos o que pode intervir na solução. Por exemplo, poder fornecer contraexemplos (encontrar ou inventar), mudar de quadros sem sugestão (relacionar), aplicar métodos não previstos, são comportamentos que se esperam neste nível. (Robert, 1998, p. 28).

Nas palavras da autora, entendemos que este nível é aquele em que o aluno chega ao resultado esperado sem que precise de indicação e sugestões de caminhos necessários a resolução da tarefa. Neste nível, o aluno procura sozinho, saberes adquiridos anteriormente viáveis à solução. O aluno poderá aplicar métodos não previsíveis, fazer mudanças de registros sem sugestões e além do mais consegue citar contraexemplos, ou seja, neste nível o sujeito age de modo autônomo e independente.

Trazemos como exemplo para este nível, a tarefa apresentada na Figura 4.

Figura 4- Exemplo de tarefa no nível disponível.

Uma maquina produziu 50 parafusos dos quais 5 são defeituosos. Ao pegar ao acaso 3 parafusos, qual é a probabilidade de que:
a) qual a probabilidade de que os três sejam perfeitos?
b) qual a probabilidade de que pelo menos um seja defeituoso?

Fonte: Dante, 2016, p.241.

Solução da tarefa enunciada na Figura 4

N(Ω) simboliza o número de combinações de 50 elementos tomados 3 a 3

$$n(\Omega) = C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \Rightarrow C_{50,3} = \binom{50}{3} \Rightarrow \frac{50!}{3!\,(50-3)!} \Rightarrow \frac{50.49\,.\,48\,.\,47!}{3\,.\,2\,.\,47!} \Rightarrow \frac{50.49\,.\,48}{3.2} \Rightarrow \frac{117.600}{6} \Rightarrow 19600$$

Evento A: os 3 parafusos são perfeitos

$$n(A) = C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \Rightarrow C_{45,3} = \binom{45}{3} \Rightarrow \frac{45!}{3!\,(45-3)!} \Rightarrow \frac{45.44\,.\,43\,.\,42!}{3\,.\,2\,.\,42!} \Rightarrow \frac{45.44\,.\,43}{3.2} \Rightarrow \frac{85140}{6} \Rightarrow 14190$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{14190}{19600} \simeq 72{,}3\%$$

Evento E: “pelo menos um é defeituoso” este é o evento complementar de A: “os três são perfeitos” que é o mesmo que “nenhum é defeituoso” Assim, temos:

$$p(E) = p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}72398 = 0{,}27602$$

Para a solução desta tarefa, além da interpretação dos dados é necessário buscar em seus saberes, outros conhecimentos como, por exemplo, o da análise combinatória e, em seguida, calcular a Probabilidade, o sujeito precisa mobilizar conhecimentos relacionados à análise combinatória, ou seja, determinar com precisão o número de combinações de 50 elementos tomados 3 a 3 para o evento “parafusos perfeitos” e em seguida aplicar a propriedade para o cálculo da probabilidade do evento complementar ao evento A “parafusos defeituosos”. Desse modo, entende-se que se o sujeito resolve a tarefa, procura em seus próprios conhecimentos saberes necessários ao entendimento e solução da tarefa, só, e sem indicações, terá atendido ao nível disponível de conhecimento.

A teoria dos Registros de Representações Semióticas desenvolvida por Raymond Duval (2004), vem ao encontro do nosso objetivo quando buscamos entender os processos de compreensão e resolução de tarefas no âmbito da Probabilidade por meio dos registros de representações.

A Probabilidade é um objeto da ciência Matemática em que se predomina o raciocínio lógico e abstrato, que se apropria de uma simbologia universal para expressar sua significação, no entanto, acreditamos que na ausência desta significação não é possível à comunicabilidade nem mesmo a aprendizagem. Para Damn (2002, p. 167), ”a comunicabilidade se forma com base nas representações, o objeto a ser ensinado por parte do professor ou estudado por parte do aluno, são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem exprimir em variadas situações”. Desse modo, acredita-se que a teoria dos registros de representações possibilita compreender minuciosamente as resoluções de tarefas em Probabilidade em que se fazem o uso dos registros. Diante dessa perspectiva quais são as diferentes formas de representação, especialmente aquelas que são essenciais ao funcionamento e ao desenvolvimento do conhecimento?

De acordo com Duval (2003), uma vez que o objeto matemático é abstrato, a acessibilidade só ocorre por meio de registros de representações semióticas, ou seja, eles são uma forma de comunicar algo a alguém, no entanto, consideramos a representação como um elemento essencial para a solução de tarefas.

> a palavra “representação” “é muito frequentemente empregada sob sua forma verbal “representar” uma escrita, uma notação, um símbolo representando um objeto matemático: um número, uma função, um vetor,... Até mesmo os traçados e as figuras representando os objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo...” (Duval, 1993, como citado em Santos, 2008, p.33).

Acreditamos que é necessário, cada vez mais, entender melhor a função designada pela linguagem Matemática, assim como suas representações, considerando que este é o ponto hábil para a aprendizagem em matemática, sobretudo quando se trata do objeto Probabilidade. Em conformidade com o significado atribuído pelo autor à palavra representação, averiguamos em sua fala que, embora haja diferentes formas de empregar a representação, um objeto matemático jamais poderá ser confundido com as representações. Caso haja essa confusão, poderá haver perda de compreensão e os conhecimentos já adquiridos tornarem-se inúteis ou fora do seu contexto de aprendizado. Dessa forma, essas representações caracterizam-se como inertes por não sugerir nenhum tipo de tratamento. A distinção entre objeto e representação é então considerada um ponto hábil para que haja a compreensão em Matemática.

Duval (2005) recomenda que na aprendizagem em Matemática a utilização dos registros esteja presente, uma vez que o autor acredita que os mesmos são necessários para o desenvolvimento cognitivo do discente. Para ele, “a originalidade da abordagem cognitiva está em procurar descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio à diversidade dos processos matemáticos que lhes são propostos em situação de ensino” (Duval, 2003, p. 12). Inclusive, afirma que a excentricidade da atividade matemática está em mobilizar simultaneamente ao menos dois registros de representação concomitantemente, ou na viabilidade de mudar a todo instante de registro. Evidentemente, na resolução de tarefas cujo objeto é a Probabilidade, um registro pode aparecer favorecido, apesar disso, sempre deve existir a possibilidade de passar de um registro a outro. Entretanto, Duval (2005) salienta que o entendimento em Matemática subordina-se a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica, visto que as representações semióticas são imprescindíveis para fins de funcionamento e mobilização de conteúdos matemáticos, isto é, não é possível a mobilização de conteúdos que não esteja associada às representações.

Segundo Duval (2003), uma forma de representação pode ser entendida realmente, como tal, quando satisfaz dois atributos:

Que se disponha de ao menos dois sistemas semióticos diferentes para produzir a representação de um objeto, de uma situação, de um processo, e que espontaneamente possa se converter de um sistema semiótico para outro as representações produzidas. (Duval 2003, p. 31)

Apartir da explanaçãofeita pelo autor, entendemos que a compreensão em Matemática está diretamente ligada à competência, por parte do sujeito, para a utilização de mais de um registro, podendo assim, transitar de um para o outro na construção do conhecimento. No entanto, não podemos descartar a importância das diferentes representações, assim como discernir a melhor opção para cada tarefa. No campo da Matemática, especialmente no ramo da Probabilidade, é perceptível a possibilidade de mudança de um registro para outro. Assim sendo, quando relacionadas à solução de tarefas em Probabilidade, aumnta-se a possibilidade da apropriação da mudança de registros. É notório que a probabilidade apoia-se fundamentalmente no uso das mais variadas representações.

3. As Tarefas e Suas Análises

Quanto às análises das tarefas, Oliveira (2018) apresenta em sua pesquisa, os argumentos que permitiram considerar o Nível de Funcionamento dos Conhecimentos para cada tarefa e as possibilidades de mudanças de Registros de Representação como segue:

3.1 Tarefa 1

Esta tarefa trata-se do nível de conhecimento técnico, Robert (1998), uma vez que nela estão explícitas as ferramentas necessãrias a sua solução. Nesta perspectiva, apresenta-se a figura:

Figura 5- Tarefa no nível Técnico.

Uma caixa contém 30 bolas de madeira e todas com o mesmo tamanho, sendo 18 azuis e 12 amarelas. Retirando-se uma bola qualquer dessa urna, qual a probabilidade de ela ser azul? E a probabilidade de ser amarela?

Fonte: Giovanni; Bonjorno, 2000, p.239.

Resolução: Sendo n(U) o espaço amostral, temos:

$$n(U) = 30$$

$$n(azul) = 18$$

$$n(amarela) = 12,$$

$$P(azul) = \frac{n(azul)}{n(U)} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \ ou \ 60\%$$

$$P(amarela) = \frac{n(amarela)}{n(U)} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 0{,}4 \ ou \ 40\%$$

Essa tarefa compreende o nível de conhecimento Técnico, pois nela estão presentes as ferramentas necessárias à sua resolução. De acordo com Robert (1998) uma tarefa no nível técnico "corresponde às mobilizações indicadas, isoladas, que explicitem aplicações imediatas, de teoremas, propriedades, definições, fórmulas, etc." Assim, para a solução desta tarefa, será necessária a aplicação imediata da fórmula que define a Probabilidade e em seguia efetuar o cálculo da divisão por meio da razão da Probabilidade.

Trata-se de um tipo de tarefa que não exige a aplicação de outros conhecimentos da Matemática para a sua resolução, pois está inserida em um contexto simples, sem a necessidade de recorrer a outras etapas do conhecimento ou até mesmo desenvolver um trabalho preliminar, basta analisar e interpretar os dados fornecidos no enunciado.

Nas palavras do Duval (2003), compreendemos que esta tarefa está posta na linguagem "natural", contendo alguns valores Matemáticos dos quais se referem às quantidades de bolas azuis e amarelas, num total de trinta unidades. Assim sendo, quando uma tarefa está posta neste registro, aumenta-se a possibilidade para maior entendimento e compreensão, desde que se desenvolva a capacidade de interpretar símbolos e signos que constituem a linguagem, ou seja, a função simbólica.

Para a solução desta tarefa, é necessário analisar atentamente a linguagem em que está posta o enunciado para em seguida explicitar o espaço amostral,

$$n(U) = 30$$

que representa o número de elementos do espaço amostral, pois se trata de uma tarefa que se relaciona estreitamente com a possibilidade de dominar conceitos que se expressam na linguagem. É importante salientar que neste espaço amostral, exige-se reconhecer que o número de elementos do evento "bolas azuis" é igual a dezoito n(azul) = 18, e que n(amarela) = 12 representa o número de elementos do evento "bolas amarelas" fundamentais para o desenvolvimento do que está proposto no enunciado, ou seja, desenvolver o cálculo da Probabilidade de uma das bolas retirada ser azul ou amarela.

Para a sua resolução, trata-se apenas de um trabalho que envolverá o funcionamento de ferramentas, mais especificamente voltadas à compreensão de definições da Probabilidade, podendo ser representada em linguagem numérica, em que a retirada, ao acaso, de uma bola azul é dada por:

$$P(azul) = \frac{n(azul)}{n(U)},$$

em que n(azul) refere-se ao evento, "número de bolas azuis".
Esta tarefa trata-se do desenvolvimento do cálculo da Probabilidade por meio da razão probabilística, sendo:

$$p(a) = \frac{Número\ de\ casos\ favoráveis}{Número\ de\ casos\ possíveis}$$

em que a retirada, ao acaso, de uma bola amarela é dada por:

$$P(amarela) = \frac{n(amarela)}{n(U)}$$

em que n(amarela) refere-se ao evento, "número de bolas amarelas" e n(U), refere-se ao espaço amostral "Ω", ou seja, total de bolas contidas na caixa, explicitar assim como reposta correta, para a probabilidade da retirada, ao acaso, da bola azul ser 0,6 e da retirada, ao acaso, da bola amarela, 0,4. A tarefa admite diferentes tratamentos dos registros de representações podendo ser solucionada no registro numérico fracionário, decimal ou em percentual.

3.2 Tarefa 2

Esta tarefa envolve Probabilidade pelo Princípio da inclusão-exclusão, muito utilizado para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos, não necessariamente disjuntos. Trata-se do nível de conhecimento mobilizável Robert (1998). Assim sendo, temos:

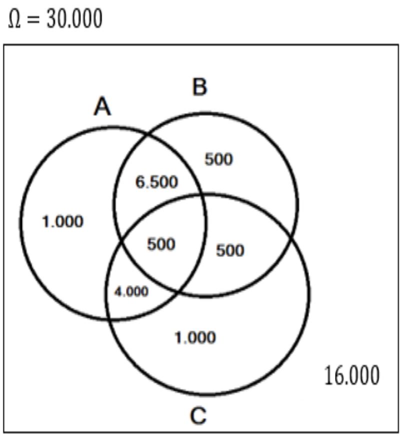
Figura 6- Tarefa no nível Mobilizável.

Uma cidade tem 30.000 Habitantes e três jornais A B e C. Uma pesquisa de opinião revela que: 12.000 leem A; 8.000 leem B; 7.000 leem A e B; 6.000 leem C; 4.500 leem A e C; 1.000 leem B e C; 500 leem A, B e C. Qual a Probabilidade de que um habitante leia: a) Pelo menos um jornal; b) Só um jornal.

Fonte: Morgado et al., 2005, p. 135.

É possível solucionar esta tarefa por outros modos de resolução, porém optou-se pelo diagrama de Venn, por ser um método que facilitar a compreenção dos dados do espaço amostral contidos no enunciado. Assim sendo, temos a figura:

Figura 7– Diagrama de Venn.



Fonte: Oliveira, 2018, p. 68.

a) Qual a probabilidade de que ele leia pelo menos um jornal?

$$\Omega = 30.000$$

$$30.000 - 16.000 = 14.000$$

$$p(A) = \frac{Número\ de\ casos\ favoráveis}{Número\ de\ casos\ possíveis} = P = \frac{14.000}{30.000} = \frac{7}{15}\ ou\ 0{,}4666666666\ldots \cong 46{,}6\%$$

b) Qual a probabilidade de que ele leia somente um jornal?

$$A + B + C = 1.000 + 500 + 1.000 = 2.500$$

$$p(A) = \frac{Número\ de\ casos\ favoráveis}{Número\ de\ casos\ possíveis} = P = \frac{2.500}{30.000} = \frac{25}{300} = \frac{1}{12}\ ou\ 0{,}083333333 \cong 8{,}3\%$$

Esta tarefa enuncia um evento presente no universo cultural contemporâneo, exigindo conhecimentos que não estão relacionados apenas a conceitos da Probabilidade. Assim, em sua solução, é preciso articular conceitos relacionados à União e Intersecção de Conjuntos, Diagrama de Venn e de fração "parte todo". Portanto, a busca de soluções corretas para esta tarefa implica na articulação de conhecimentos relacionados a Experimento Aleatório, Probabilidade e Eventos Complementares.

De acordo com Robert (1998), consideramos esta tarefa como sendo uma tarefa que envolve o nível de conhecimento Mobilizável, ou seja, corresponde a funcionamentos mais amplos, embora estejam indicados no enunciado, passa da simples aplicação de uma fórmula ou definições, pois, envolve outros conhecimentos da Matemática para responder ao que está posto no enunciado. Para esta tarefa, é necessário colocar em funcionamento seus conhecimentos para aplicar a definição de Probabilidade. Esse nível testa um funcionamento em que existe um princípio de justaposição de saberes, ou seja, é necessário organizar outros conhecimentos para utilizar e dispor do mais adequado.

Do ponto de vista dos Registros de Representações de Duval (2003), a tarefa está enunciada no registro em língua natural fornecendo dados numéricos. A solução desta tarefa admite mudança de registros, assim como conversão e tratamento. Uma das possibilidades para a solução desta tarefa é a utilização do diagrama de Venn, 'registro figural e numérico' para a organização e interpretação dos dados e em seguida a aplicação da definição de Probabilidade e o cálculo da divisão. Assim sendo, digamos que está sendo realizada uma conversão do registro em língua natural e numérico para o registro figural e em seguida permanecer dentro do registro numérico para o cálculo da Probabilidade. Considera-se que esta tarefa admite mais de um tratamento, "algébrico" uma vez que poderá ser solucionada por meio de sistema de Equações Polinomiais do 1º grau.

Para Robert (1998), atender este nível, só é possível, uma vez que terá adaptado corretamente seus conhecimentos e aplicado o conhecimento adequado, ou mudado de ponto de vista ou de quadro ainda que seja com a indicação, ou até mesmo ter articulado duas informações de natureza diferente. Mudar de Ponto de vista, para Robert (1998), significa uma maneira de entrar em uma questão ou de modificar esta entrada, ou podendo ser mudada, ou seja, para nós, trata-se inicialmente da estratégia escolhida pelo aluno para a solução, no decorrer da resolução.

Se durante toda a resolução da situação o sujeito tiver solucionado corretamente a

Research, Society and Development, v. 9, n. 10, e6999108796, 2020
(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i10.8796

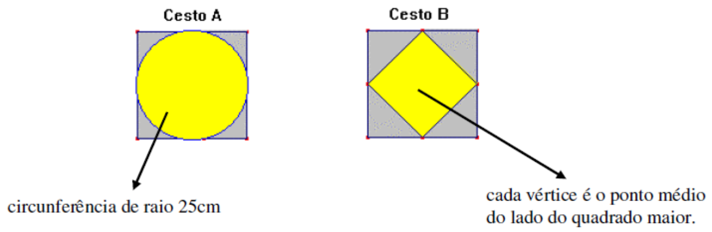
tarefa, explicitando a Probabilidade da quantidade de habitantes solicitados nos itens a e b, adaptando seus conhecimentos já estabilizados necessários à solução, ainda que precise da sugestão dos colegas para as adaptações necessárias ao que foi proposto, podemos considerar que o sujeito foi capaz de solucionar a tarefa posta no nível Mobilizável de conhecimentos, uma vez que estes são os comportamentos que se espera para este nível de conhecimento.

3.3 Tarefa 3

Trata-se de uma tarefa em que as ferramentas necessárias para a solução não estão explicitas no enunciado da Figura 8, mesmo com os desenhos dos cestos de lixo, faz-se necessário uma articulação do conhecimento, até mesmo de outros conteúdos da Matemática para se chegar a solução correta. A terceira tarefa envolve Probabilidade por meio do cálculo de área.

Figura 8- Tarefa no nível Disponível.

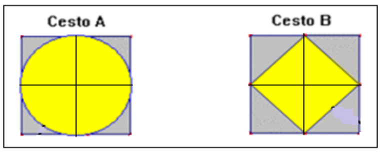
"Lixo ao cesto. A prefeitura espalhou cestos de lixo pela cidade para dar ênfase a uma campanha de higiene. Os cestos têm as formas indicadas na figura abaixo. Se uma pessoa qualquer lança uma bolinha de papel na direção do cesto, sem fazer pontaria, qual a Probabilidade de que ele acerte dentro do cesto e não na parte de suporte, em cada um dos modelos? Em cada caso, o suporte do cesto tem a forma de um quadrado de lados 50cm."



Fonte: Coutinho & Miguel (2002).

Embora o enunciado dessa tarefa propcie ampla interpretação, busca-se uma reconfiguração dos desenhos dos cestos de lixo conforme apresentada na Figura 9, como uma possível estratégia para resolução dessa tarefa.

Figura 9- Reconfiguração dos cestos de lixos A e B.



Fonte: Oliveira, 2018, p. 74.

Calcula-se a área do quadrado dos suportes:

$$A = l^2 \; ou \; A = l.l \; = 50\,.50 = 2500cm^2,$$

Área total do suporte tanto do cesto A como do B é igual a

$$2500cm^2.$$

Área do cesto A:

O raio (r) da circunferência é 25 cm, então temos:

$$A_{circunferência} = \pi r^2 =$$

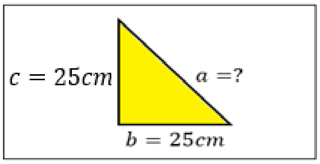
$$A_{circunferência} = 3{,}14\,.625 =$$

$$A_{circunferência} = 1.962cm^2$$

Área do cesto B:

Faz-se necessário a utilização do Teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$, assim, parte da reconfiguração é analisada em um dos triângulos observados nos cestos ao dividir o suporte do cesto B apresentado na Figura 10, etapa fundamental na interpretação do enunciado.

Figura 10- Triângulo retângulo, interpretação do enunciado.



Fonte: Oliveira, 2018, p. 75.

$$a^2 = 25^2 + 25^2 =$$

$$a^2 = 625 + 625 =$$

$$a^2 = 1250 =$$

$$a^2 = \sqrt{1250} =$$

$$a \cong 35\ cm$$

(Medida do lado do cesto B)

Então a área do cesto B poderá ser calculada fazendo:

$$A = l\,.\,l \;\; ou\; A = \; l^2 \Rightarrow A = 35cm\,.\,35cm \;\Rightarrow A = 1246\; cm^2$$

Probabilidade de acertar no cesto A:

$$p(A) = \frac{Número\ de\ casos\ favoráveis}{Número\ de\ casos\ possíveis} = \; P(A) = \frac{1962}{2500} = 0{,}7848$$

ou 78,48%.

Probabilidade de acertar no cesto B:

$$p(B) = \frac{Número\ de\ casos\ favoráveis}{Número\ de\ casos\ possíveis} P(B) = \frac{1250}{2500} = 0{,}5$$

ou 50%.

De acordo com os níveis de funcionamento dos conhecimentos propostos por Robert (1998), esta é uma tarefa abrangente ao nível Disponível, tendo em vista a existência de conceitos implícitos que o sujeito deverá dispor para solucioná-la. Embora no enunciado estejam presentes figuras que facilitam a compreensão, as ferramentas necessárias para a resolução não estão explícitas no enunciado, apenas a medida de um dos lados do suporte do cesto de lixo cujo formato corresponde à figura geométrica quadrado. A tarefa exige de cada sujeito, analisar e interpretar o enunciado, buscando em seus conhecimentos caminhos para solução correta.

Do ponto de vista dos Registros de Representação Semiótica, Duval (2003), a tarefa está enunciada em língua natural, figural e numérica. Para sua resolução, existem diferentes caminhos considerando os três tipos de registros, poderá optar-se pela reconfiguração do desenho que envolve o registro figural; a tarefa deve ser resolvida no registro algébrico quando se tratar do cálculo das áreas dos cestos e numérico para o cálculo da Probabilidade. Quando se tratar do registro numérico, esta tarefa também poderá ser resolvida no registro numérico, podendo ser tratado pelo registro fracionário, decimal ou percentual, uma vez que o cálculo da Probabilidade permite a articulação desses registros.

A tarefa é considerada complexa, pois exige de educandos um esforço cognitivo para buscar conhecimentos adquiridos anteriormente, ou seja, buscar em seus conhecimentos prévios os saberes necessários para a resolução da tarefa. Os conhecimentos utilizados, como o cálculo de áreas e a aplicação do Teorema de Pitágoras, são as ferramentas implícitas que levam a soluções corretas e permitem tornar explícita a "Probabilidade" solicitada no enunciado da tarefa.

Para esta tarefa, a utilização dos diferentes registros, assim como as distintas resoluções possíveis, compõem etapas que descrevem o processo de mobilização do conhecimento em que o educando desfruta-se de um saber já existente, conhecimentos prévios, adquiridos nas etapas anteriores de escolarização ao longo de sua vida escolar, passando pelos momentos de discussão, colocando-se em ação na busca de respostas corretas. Quanto ao nível de conhecimento envolvido nesta tarefa, o sujeito poderá atender ao nível Disponível se souber resolver o que foi solicitado no enunciado, sem indicações, procurando em seus próprios conhecimentos saberes que possam intervir na solução. Assim, o educando poderá estabelecer comparações desta tarefa com outras tarefas semelhantes, encontrar ou inventar modos de solucioná-la, permitindo-lhe chegar com êxito às soluções, aplicar seus conhecimentos relacionados ao cálculo de área das figuras planas e do Teorema de Pitágoras, assim como o da Probabilidade. Segundo Robert (1998), estes são os comportamentos que se pode esperar neste nível.

4. A Articulação entre os Níveis de Funcionamento dos Conhecimentos e os Registros de Representações Semióticas

Para o nível de funcionamento dos conhecimentos técnicos, as tarefas são resolvidas de forma clara, ou seja, por meio de aplicações diretas de fórmulas ou teoremas. Do ponto de vista dos registros de representação semiótica, acredita-se que nesse nível a situação poderá ter mudanças de registro que seja de forma direta, como por exemplo, o cálculo da Probabilidade, dado o enunciado no registo em língua natural para o registro no sistema numérico.

No nível de funcionamento dos conhecimentos mobilizáveis, as tarefas não são tão claras, embora a noção em jogo esteja explicita, é necessário que os sujeitos adaptem e organizem seus conhecimentos. No que refere aos registros de representação semiótica, neste nível, a Situação deve ter mudança de registros que conduz o sujeito a organizar e adaptar os dados, como por exemplo, dada uma tarefa no registo numérico e em língua natural, o sujeito necessita calcular a Probabilidade por meio de representações figurais e algébricas.

Referindo-nos ao nível de funcionamento dos conhecimentos disponíveis, normalmente, as noções em jogo não são explicitas, os sujeitos precisam buscar em seus conhecimentos anteriores elementos necessários à solução, é necessário que saibam fazer o que está proposto, sem indicações, procurar em seus próprios conhecimentos para poder intervir na resolução. Do ponto de vista dos registros de representação semiótica, podemos dizer que as conversões devem ser autônomas, ou seja, não há o que sugerir. É ideal que os sujeitos reúnam seus conhecimentos e se organizem nas resoluções da tarefa proposta. Por exemplo, dada à tarefa no registro figural (cesto de lixo em formato de circunferência e quadrado) calcular a Probabilidade de acerto da bolinha “lixo” dentro destes cestos. Os sujeitos deverão calcular a Probabilidade assim como fazer conversões do registro figural e numérico para o registro algébrico e numérico e aplicar o teorema para o cálculo da Probabilidade, seja no registro algébrico ou numérico.

Robert (1998) utiliza o trabalho de Duval (1994) acerca dos Registros de Representações Semióticas para equilibrar parte de sua pesquisa sobre o estudo das noções de funcionamento dos conhecimentos dos alunos. Deste modo, estas pesquisas vêm ao encontro de nosso objetivo uma vez que buscamos investigar de que modo os Níveis de Funcionamneto dos Conhecimentos se articulam aos Registros de Representações Semióticas em tarefas envolvendo a probabilidade.

5. Considerações Finais

Salientamos que a busca por verificar em que nível de funcionamento as tarefas de Probabilidade se encontram, e que tipos de Registros de Representação Semióticas estão articulados cada uma delas, bem como, possibilitar ao aluno mudar de quadros, realizar tratamentos e efetuar os diferentes registros, constitui-se em um caminho relevante no processo de avaliação que o professor precisa realizar na organização de sua atuação docente.

Um produto relevante desta organização está na percepção do professor, do valor do conhecimento que pode ser produzido pelo aluno em cada etapa da escolarização, o impacto das condições de ensino na aprendizagem, e no desenvolvimento do sujeito e a necessidade de avaliação da organização da proposta didática. O desenvolvimento destas análises poderá contribuir efetivamente para compreender as exigências do processo de produção do conhecimento científico, especialmmente na organização de tarefas sejam para o ensino aprendizagem ou para avaliação de conhecimentos.

Enfatizamos ainda, que é preciso estimular a busca e o aprofundamento das questões relacionadas ao ensino de conteúdos da matemática e de estudos posteriores, como por exemplo, estudos por meio da utilização de sequências de ensino que envolva análises com este aporte teórico, que se mostrem eficazes para a aquisição dos conceitos Matemáticos, sobretudo aos que se referem à Probabilidade.

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i10.8796

Referências

Batanero, C. (2002). *Los retos de la cultura estadística.* Conferencia en las Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística, Buenos Aires. Confederación Latino-americana de Sociedades de Estadística.

Brasil. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Proposta preliminar. Segunda versão revista. Brasília: MEC, 2016. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192

Brasil, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnologia. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. BRASÍLIA: Ministério da Educação, 2002.

Coutinho, C. Q. S.; Miguel, M. I. R. Introdução ao pensamento combinatório. In: Pires, C. M. C.; Cure, E.; Campos, M. M. R. Ensino Médio. Módulos da 2.ª série. São Paulo: Proem, 2002. *Apostila do curso Construindo Sempre Matemática* – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da PUC/SP – Secretaria de Estado da Educação de São Paulo. Material do aluno – Versão preliminar.

Damn, R. F. Registro de representação. In: Machado, S. D. A. *Educação matemática*: uma introdução. (2a ed). São Paulo: Educ, 2002. p. 167-188.

Dante, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicação* (3a ed. v. 2). São Paulo: Ática, 2016, p. 392.
Duval, R. *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática*. In: Machado, Silvia D. A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática*: Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

Duval, R. *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales*. (Trad. Myriam Vega Restrepo). Colômbia Universidad del Valle, Instituto de Education y Pedagogia. Grupo de Educatión Matemática, 2004.

(CC BY 4.0) | ISSN 2525-3409 | DOI: http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v9i10.8796

Santos, C. A. B. (2010). *Formação de professores de matemática: contribuições de teorias didáticas no estudo das noções de área e perímetro* (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, SP, Brasil.

Giovanni, J, R; Bonjorno, J, R. (2000). *Matemática: Uma Nova Abordagem*. (v. 2) Versão Trigonometria. São Paulo: FTD.

Giovanni, J, R; Bonjorno, J, R. (2000). Les différents fontionnementes possibles d'une figure dans une demarche geometrique. *Repéres*, n. 17, p. 119-138, 1994.

Giovanni, J, R; Bonjorno, J, R. (2000). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, Irem de Strasbourg, v. 10, p. 5-53, 2005.

Morgado, A.C.O., Carv alho, J.B.P., Carvalho, P.C.P & Fernandez, P. (2005) *Análise Combinatória e Probabilidade*. (9a ed.). Rio de Janeiro: SBM.

Neto, A. S. (2014). O que São os PCNs? O que afirmam Sobre a Literatura? Debates em Educação, Maceió, v. 06, n. 12, p. 112-128, Jul./dez.

Oliveira, S. G. (2018). *Níveis de funcionamento dos conhecimentos sobre Probabilidade em alunos do ensino médio* (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, SP, Brasil.

Robert, A. Outils D´Analyse dês Contenus Mathématiques à enseigner au Lycée et á IÚniversité. *Recherches em Didactique dês Matématiques*, v. 18, n. 2, p. 139-190, 1998.

Porcentagem de contribuição de cada autor no manuscrito

Sergiano Guerra de Oliveira – 70%

Cintia Aparecida Bento dos Santos – 15%

Laura Marisa Carnielo Calejon – 15%